

**Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Berechnung langzeitbelasteter
Bauteile aus Stahlbeton und Spannbeton unter besonderer Berücksichtigung des
nichtlinearen Kriechens und der Rißbildung**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor - Ingenieur (Dr.-Ing.)

an der Fakultät Bauingenieurwesen

der

BAUHAUS - UNIVERSITÄT WEIMAR

vorgelegt von

Dipl.-Ing. Jörg Diener

geb. am 16.07.1966 in Köthen/Anhalt

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. E.Raue
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. G.Mehlhorn
Prof. Dr.-Ing. habil. G.Burkhardt

Tag der Disputation: 09.März 1998

Kurzreferat

Der Schwerpunkt der Arbeit ist die Entwicklung eines Berechnungskonzeptes, mit dem die Auswirkungen des zeitabhängigen Materialverhaltens des Betons und der Spannbewehrung auf das Tragverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen wirklichkeitsnah abgeschätzt werden können. Dabei wird auf die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens und der Rißbildung besonderer Wert gelegt.

Das Konzept basiert auf der sukzessiven Ermittlung der Schnittgrößenanteile und der Deformationen zu festgelegten Zeitpunkten, wobei die Ergebnisse der vorausgehenden Zeitschritte berücksichtigt werden. Ausgehend von der Formulierung des mechanischen Problems als Extremalaufgabe wird die Berechnung innerhalb eines Zeitschritts auf die Lösung einer quadratischen Optimierungsaufgabe zurückgeführt, wobei die Rißbildung des Betons und geometrisch nichtlineare Einflüsse berücksichtigt werden können. Die Einbeziehung des nichtlinearen Kriechens erfolgt durch die Beschleunigung der linearen Kriechgeschwindigkeit mit einem, von der aktuellen Betonspannung abhängigen, Kriechzahlerhöhungsfaktor.

Das Berechnungsmodell wird anhand von Langzeitversuchen an hochbelasteten Betonprismen und Stahlbetonstützen verifiziert. In umfangreichen numerischen Untersuchungen wird der Einfluß des nichtlinearen Kriechens auf das Tragverhalten von vorgespannten Querschnitten und Stahlbetonstützen analysiert.

Abstract

A strategy for the analysis of reinforced and prestressed concrete members under long-term loading is developed. The method allows the consideration of nonlinear creep and cracking of concrete.

The concept based on the successive determination of internal forces and deformations to fixed time points. By this the results of the former time steps are considered. Starting from the formulation of the mechanical problem by an extremum principle the computation of a single time step is reduced to the solution of a quadratic optimization problem allowing for cracking of concrete and geometrically nonlinear effects. The nonlinear creep of concrete is taken into account by acceleration of the linear creep rate by a function depending on actual concrete stress.

It will be shown that the model agrees satisfactory with long-term test data. By extensive numerical calculations the influence of nonlinear creep on the bearing resistance of reinforced concrete columns is investigated.

0 Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 0 | Inhaltsverzeichnis | 3 |
| 1 | Einleitung | 6 |
| 1.1 | Problemstellung und Ziel der Arbeit..... | 6 |
| 1.2 | Stand der Forschung..... | 8 |
| 2 | Materialverhalten von Beton unter kurzzeitiger und langzeitiger Belastung und seine mathematische Beschreibung | 13 |
| 2.1 | Einfluß der Struktur auf das Festigkeits- und Formänderungsverhalten des Betons..... | 13 |
| 2.1.1 | Strukturbildung und Veränderung der Betonstruktur infolge einachsiger Kurzzeitbelastung..... | 13 |
| 2.1.2 | Langzeitverhalten des Betons..... | 14 |
| 2.2 | Festigkeits- und Formänderungskenngrößen des Betons..... | 16 |
| 2.2.1 | Druckfestigkeit..... | 16 |
| 2.2.2 | Zugfestigkeit..... | 18 |
| 2.2.3 | Elastizitätsmodul..... | 19 |
| 2.3 | Schwinden des Betons - Vorhersageverfahren..... | 21 |
| 2.4 | Kriechen..... | 23 |
| 2.4.1 | Definitionen und grundlegende Zusammenhänge..... | 23 |
| 2.4.2 | Langzeitverhalten unter veränderlicher Spannungs- und Dehnungsgeschichte..... | 24 |
| 2.4.3 | Nichtlinearität des Kriechens unter hohen Spannungen..... | 32 |
| 2.4.4 | Vorhersageverfahren..... | 41 |
| 2.4.5 | Verknüpfung der Ansatzfunktionen mit den Kriechzahlerhöhungsfaktoren..... | 48 |
| 2.5 | Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons unter einachsiger Kurzzeitbelastung..... | 53 |
| 3 | Materialverhalten des Stahls | 56 |
| 3.1 | Betonstahl und allgemeiner Baustahl..... | 56 |
| 3.2 | Spannstahl..... | 58 |
| 4 | Numerische Behandlung ausgewählter Materialbeziehungen | 60 |
| 4.1 | Konstitutive Beziehungen und Wahl des Näherungsverfahrens..... | 60 |
| 4.2 | Diskretisierung der Materialbeziehungen..... | 62 |
| 4.3 | Untersuchung zum Einfluß der Intervallanzahl auf die Berechnungsergebnisse..... | 70 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 5 | Berechnungsmodell für Bauteile mit zeitabhängigem Materialverhalten..... | 73 |
| 5.1 | Auswirkungen des zeitabhängigen Materialverhaltens auf Stahlbeton- und Spannbetontragwerke..... | 73 |
| 5.2 | Prinzip vom Minimum des konjugierten Gesamtpotentials..... | 77 |
| 5.3 | Lagrangefunktion und Optimalitätskriterien..... | 84 |
| 5.4 | Überführung des Extremalprinzips in eine Optimierungsaufgabe..... | 87 |
| 5.4.1 | Annahmen und Voraussetzungen..... | 87 |
| 5.4.2 | Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen am Querschnitt..... | 88 |
| 5.4.3 | Aufbereitung des Materialgesetzes für die Querschnittsberechnung..... | 92 |
| 5.4.4 | Modell zur Berechnung querschnittsinterner Spannungsumlagerungen im Zustand I..... | 94 |
| 5.4.5 | Behandlung der Rißbildung und Plastizierung..... | 97 |
| 5.4.6 | Vorspannung und nachträglich ergänzte Betonquerschnitte..... | 105 |
| 5.4.7 | Erweiterung des Modells auf stabförmige Bauteile..... | 108 |
| 5.4.8 | Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen..... | 119 |
| 5.5 | Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität..... | 121 |
| 5.6 | Rechentechnische Umsetzung des Modells..... | 126 |
| | | |
| 6 | Verifikation des Berechnungsmodells..... | 129 |
| 6.1 | Unbewehrter Beton..... | 129 |
| 6.2 | Schlanke Stahlbetonstützen..... | 139 |
| 6.2.1 | Einleitung..... | 139 |
| 6.2.2 | Geometrische Abmessungen und Materialkenngrößen der untersuchten Stützen..... | 139 |
| 6.2.3 | Durchführung und Auswertung der Versuchsnachrechnungen..... | 143 |
| 6.2.4 | Parameterstudie..... | 153 |
| | | |
| 7 | Ausgewählte numerische Untersuchungen..... | 159 |
| 7.1 | Einleitung..... | 159 |
| 7.2 | Spannungsumlagerungen in einem teilweise vorgespannten Querschnitt..... | 159 |
| 7.3 | Numerische Untersuchungen zum Einfluß des nichtlinearen Kriechens auf die Tragfähigkeit schlaff bewehrter Betonstützen..... | 170 |
| | | |
| 8 | Schlußfolgerungen..... | 184 |
| 8.1 | Zusammenfassung..... | 184 |
| 8.2 | Ausblick..... | 186 |
| | | |
| 9 | Liste der verwendeten Bezeichnungen..... | 187 |
| | | |
| 10 | Literaturverzeichnis..... | 192 |

Diese Arbeit entstand im wesentlichen während meines Graduiertenstudiums an der Professur Massivbau I der Fakultät Bauingenieurwesen an der Bauhaus - Universität Weimar.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und für die jederzeit gewährte Unterstützung, auch nach Beendigung meines Graduiertenstudiums, möchte ich mich bei meinem Betreuer

Herrn Prof. Dr.- Ing. habil. E. Raue

sehr herzlich bedanken. Mein Dank gilt außerdem meinen Kollegen am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau für die kollegiale Zusammenarbeit.

Weimar, Juli 1997

1 Einleitung

1.1 Problemstellung und Ziel der Arbeit

Die mathematische Beschreibung des physikalisch und geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlbeton- und Spannbetonkonstruktionen ist seit geraumer Zeit Gegenstand intensiver Forschung. Neben ausschließlich beanspruchungsabhängigen Plastizierungs- und Bruchvorgängen (Fließen des Stahls, Rißbildung des Betons) sind vor allem zeitabhängige Prozesse im Beton und in der Spannbewehrung für Abweichungen von der linearen Elastizitätstheorie verantwortlich.

Nach ihrer Ursache lassen sich die Langzeitverformungen des Betons in beanspruchungs-unabhängige Schwindverformungen und in beanspruchungsabhängige Kriechverformungen unterteilen. Die wichtigsten Auswirkungen dieser zum Teil inelastischen Deformationen auf den Schnittgrößen- bzw. Spannungszustand eines Tragwerks lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- günstig:
- Abbau von Zwangsschnittgrößen in statisch unbestimmten Systemen
 - Verringerung von querschnittsinternen Spannungsspitzen ausgelöst durch ungleichmäßige Schwind- oder Temperatureinflüsse
- ungünstig:
- zeitlich verzögertes Stabilitätsversagen bei längskraftbeanspruchten Tragwerken
 - Abnahme der Tragfähigkeit vorgespannter Bauteile durch zeitabhängige Vorspannverluste
 - Zunahme der Stahlspannungen infolge querschnittsinterner Spannungsumlagerungen
 - zeitabhängiger Zuwachs der Tragwerksverformungen und der Querschnittsdeformationen

Die Berücksichtigung der Einflüsse infolge Kriechen und Schwinden des Betons bei der Berechnung wird, in Analogie zu den derzeit relevanten Normen und Vorschriften im EC 2 [1.1] unter anderem dann gefordert, „...,wenn sie die Gesamtstabilität des Bauwerks oder das Erreichen der Tragfähigkeit in kritischen Abschnitten nachteilig beeinflussen.“

Diese Forderung bezieht sich vor allem auf Tragwerke bzw. auf Tragwerksteile, bei denen geometrisch nichtlineare Einflüsse durch zeitabhängige Zusatzverformungen wesentlich verstärkt werden. Bei der Berechnung vorgespannter Bauteile ist nach EC2 zusätzlich Abschnitt 2.5.5 „Auswirkungen des zeitabhängigen Betonverhaltens“ P(6) zu beachten:

„Zur Abschätzung der zeitabhängigen Spannkraftverluste müssen die Einflüsse aus Kriechen und Schwinden des Betons sowie aus der Relaxation der Spannglieder in Rechnung gestellt werden.“

Neben dem teilweise tragfähigkeitsmindernden Einfluß sind vor allem die Auswirkungen des Kriechens und Schwindens auf die Gebrauchstauglichkeit des Gesamttragwerks bzw. einzelner Tragwerksteile zu berücksichtigen. Das betrifft im besonderen zeitlich anwachsende Verformungen und anwachsende Rißbreiten in der Zugzone. Die Verformungsberechnung hat dabei unter Einbeziehung des zeitabhängigen Betonverhaltens, der Rißbildung sowie der Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen zu erfolgen.

Zur Berechnung der oben genannten Problemkreise existieren eine Vielzahl verschiedener Berechnungsverfahren (siehe auch Abschnitt 1.2), die zumeist auf mehr oder weniger weitgehenden Idealisierungen aufbauen, da aufgrund der im allgemeinen von vornherein unbekannten Betonspannungsentwicklung exakte geschlossene Lösungen fehlen.

Eine grundlegende Voraussetzung für die angesprochenen Verfahren ist die Annahme einer von der aktuellen Betonspannung unabhängigen Kriechzahl. Dieser Sonderfall, auch als lineares Kriechen bezeichnet, ist nur für den Gebrauchslastbereich (die Betonspannungen betragen etwa 30..40% der Betondruckfestigkeit) zutreffend. Mit Einführung einer auf Teilsicherheitsbeiwerten beruhenden Sicherheitskonzeption im Massivbau sind jedoch hinsichtlich der Beurteilung der Tragfähigkeit Spannungszustände denkbar, in denen dieser Grenzwert überschritten wird. Im EC2 wird diesem Sachverhalt durch die Forderung, die Betonspannungen unter quasi-ständigen Lasten auf den Wert $0.45 f_{ck}$ zu beschränken, „*wenn das Kriechen die Funktion des betrachteten Bauteils wesentlich beeinflusst*“, Rechnung getragen. Der zweite mögliche Weg, über eine genauere Nachweisführung die Trag- und Nutzungsfähigkeit des entsprechenden Bauteils zu gewährleisten, ist aufgrund zusätzlich eintretender Spannungsumlagerungen zwischen den einzelnen Betonfasern mathematisch nur schwer beherrschbar. Die zusätzlichen Umlagerungen resultieren dabei aus der unterschiedlich starken Beschleunigung der Kriechdehnungen der einzelnen Betonfasern innerhalb eines Querschnitts.

Aus den dargestellten Problemkreisen läßt sich ein Bedarf an geeigneten Lösungsmethoden ableiten, mit denen die Auswirkungen des Kriechens und Schwindens auf Stahlbeton- und Spannbetontragglieder ohne prinzipielle statische und physikalische Einschränkungen abgeschätzt werden können.

Dementsprechend besteht das Ziel der vorliegenden Arbeit in der Entwicklung, der rechentechnischen Umsetzung und der Anwendung einer Berechnungsmethode für langfristig hochbelastete Tragelemente aus Stahlbeton und Spannbeton, mit der sich zusätzlich physikalisch und geometrisch nichtlineare Einflüsse berücksichtigen lassen. In diesem Zusammenhang soll ein Beitrag zu folgenden Problemkreisen geleistet werden:

- mathematische Formulierung des nichtlinearen Kriechens und dessen näherungsweise Beschreibung
- Formulierung eines Berechnungsmodells für Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte unter Berücksichtigung der Rißbildung und Plastizierung des Betons
- Anwendung der mathematischen Optimierung als numerisches Lösungsverfahren zur Berechnung der Auswirkungen des zeitabhängigen Materialverhaltens unter Berücksichtigung physikalisch und geometrisch nichtlinearer Einflüsse
- qualitative und quantitative Betrachtungen zum Einfluß des nichtlinearen Kriechens und der Rißbildung auf das Tragverhalten langzeitbelasteter Stahlbeton- und Spannbetonelemente

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die Untersuchungen auf stabförmige Bauteile beschränkt. Allerdings ist die vorgeschlagene Vorgehensweise prinzipiell auch auf andere Tragstrukturen durch Modifikation der entsprechenden Gleichgewichts-, Verträglichkeits- und Plastizitätsbedingungen anwendbar.

In Abschnitt 2 der Arbeit werden vorhandene mathematische Modelle zur Beschreibung des zeitabhängigen Materialverhaltens des Betons kritisch beurteilt. Obwohl dieser Problemkreis

nicht den Schwerpunkt der Arbeit bildet, werden die grundlegenden Zusammenhänge ausführlich diskutiert, um die Geschlossenheit der Gesamtdarstellung sicherzustellen. Die Auswahl der in der Arbeit weiterverwendeten Materialgesetze erfolgt unter dem Gesichtspunkt der möglichst wirklichkeitsnahen Beschreibung des zeitabhängigen Betonverhaltens. Der Einbeziehung der Nichtlinearität des Kriechens unter hoher Spannung wird dabei besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Aufgrund des ausgeprägt zufälligen Charakters des Kriechverlaufs und der das Kriechen beeinflussenden Parameter wird das Materialgesetz unabhängig von einer speziellen Kriechfunktion formuliert, so daß die Berechnung prinzipiell mit jeder beliebigen Kriechfunktion durchgeführt werden kann. Die Beschreibung des zeitabhängigen Verformungsverhaltens des Spannstahls erfolgt in gleicher Weise.

Nach zeitlicher Diskretisierung der maßgebenden Materialgesetze wird ein Modell zur Berechnung der zeitabhängigen Auswirkungen des langzeitigen Materialverhaltens unter Berücksichtigung physikalisch und geometrisch nichtlinearer Einflüsse aus dem Prinzip der virtuellen Spannungen hergeleitet. Durch die Überführung in eine Extremalaufgabe kann die Problemlösung mit Hilfe mathematischer Optimierungsalgorithmen erfolgen. Die Ermittlung der zeitlich veränderlichen Schnittgrößen und Deformationen wird somit auf die sukzessive Lösung quadratischer Optimierungsaufgaben zurückgeführt, wobei die Ergebnisse der vorangegangenen Zeitschritte Eingangswerte für die Berechnung des jeweiligen aktuellen Zeitschritts darstellen. Wegen des erheblichen numerischen Aufwandes wird ein Rechenhilfsmittel in Form eines Computerprogramms entwickelt, mit dem die Berechnung aller in der Arbeit aufgeführten Anwendungsbeispiele erfolgt.

Das Berechnungsmodell wird durch Vergleichsrechnungen mit der Fachliteratur entnommenen Versuchen an unbewehrten Betonzylindern und schlanken Stahlbetonstützen mit einachsiger Lastausmitte überprüft, wobei eine zufriedenstellende Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse mit den Meßwerten festgestellt wird. Zusätzlich erfolgt eine Parameterstudie bezüglich des Einflusses einzelner Eingangsgrößen auf die Berechnungsergebnisse.

Im Anschluß werden die Ergebnisse numerischer Untersuchungen an ausgewählten baupraktischen Problemen vorgestellt. Dabei wird besonders auf den Einfluß des nichtlinearen Kriechens auf die querschnittsinternen Spannungsumlagerungen in vorgespannten Querschnitten und auf die Langzeitstabilität dauerbelasteter Stahlbetonstützen eingegangen.

1.2 Stand der Forschung

Der Sachverhalt, daß im Beton von der Zeit abhängige Kriechverformungen auftreten, ist seit Beginn dieses Jahrhunderts bekannt. Erstmalig wurden Beobachtungen zum zeitabhängigen Verformungsverhalten von Beton im Jahre 1905 von *Woolson* [1.2] beschrieben. Während die Versuche in den darauffolgenden Jahren im wesentlichen auf die Quantifizierung der Kriechverformungen ausgerichtet waren, stellte *McMillan* [1.3] anhand von Dauerlastversuchen an Stahlbetonsäulen fest, daß infolge des Kriechens eine bedeutende Umlagerung der Kräfte vom Beton auf den Stahl stattfindet.

Die ersten Ergebnisse systematischer Kriechversuche unter kontrollierten Umweltbedingungen wurden zu Beginn der dreißiger Jahre von *Davis* [1.4]-[1.9] und davon unabhängig von *Glanville* [1.10], [1.11] veröffentlicht. Aufgrund zusätzlicher E-Modul-

Messungen zu verschiedenen Zeitpunkten kam *Glanville* im Unterschied zu *Davis* zu dem Schluß, daß die elastische Verformung eine zeitlich veränderliche Größe ist.

Aufbauend auf dem Vorschlag von *Withney* [1.12], die Auswirkungen des Betonkriechens bei der Berechnung von Stahlbetonelementen durch „ideelle Kriechkurven“ zu beschreiben, versucht *Dischinger* [1.13], [1.14] 1937 und 1939 den Einfluß des Kriechens auf die Schnittgrößen durch eine Differentialgleichung zu erfassen. Der Grundgedanke dabei war, daß die Kriechverformungen nur vom Betonalter bei Aufbringen der Last und der Belastungsdauer abhängen. Auf dieser unter dem Begriff Alterungstheorie bekannt gewordenen Methode basierten in den nachfolgenden Jahrzehnten aufgrund ihrer relativ einfachen Handhabbarkeit eine Vielzahl von Berechnungsverfahren zur Abschätzung der Auswirkungen des Kriechens auf Betonverbundtragwerke.

Der entscheidende Nachteil der Alterungstheorie besteht in der Nichtberücksichtigung der verzögert elastischen Verformung. Insbesondere bei Auftreten größerer zeitlicher Spannungsänderungen und Entlastungsvorgängen werden widersprüchliche Ergebnisse zum tatsächlichen Betonverhalten erzielt.

Die Anwendung der Theorie der elastischen Nachwirkung nach *Boltzmann* [1.15] auf das zeitabhängige Verformungsverhalten des Betons führt auf den Sonderfall, daß die Kriechverformungen ausschließlich als verzögert elastische Verformungen aufgefaßt werden und nach Entlastung vollständig reversibel sind.

Aus der Bemühung heraus, sowohl den Alterungseffekt als auch die verzögerte elastische Verformung des Betons mathematisch zu erfassen, formulierte *Arutjunjan* [1.16] eine auf einer Kriechfunktion aufbauende Integralgleichung, die in ihrer allgemeinsten Form eine Funktion des Betonalters und der Belastungsdauer ist. Diese Annahme, die auch als „Theorie des elastisch kriechenden Körpers“ bezeichnet wird, stellt bis heute die Grundlage für die strengste Beschreibung des linearen zeitabhängigen Betonverhaltens unter Dauerbelastung dar. Bei Anwendung dieser Theorie ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, daß die Integralgleichung in geschlossener Form nicht lösbar ist. Dies führte zur Entwicklung einer Reihe inkrementeller Algorithmen, die, aufgrund des großen numerischen Aufwands, vorwiegend in Computerprogrammen zum Einsatz kommen.

In diesem Zusammenhang sind die Arbeiten von *Trost* [1.17] zu nennen, der die Integralgleichung mit Hilfe eines Relaxationskennwerts näherungsweise durch eine algebraische Beziehung ersetzt. Durch den Relaxationskennwert, auch unter der Bezeichnung Alterungsbeiwert geläufig, wird dabei die abnehmende Kriechfähigkeit infolge Alterung des Betons erfaßt. Diese Vorgehensweise wird durch den Vorschlag von *Bazant* [1.18], den Relaxationskoeffizienten und die Kriechzahl in einem alterungsabhängigen effektiven Modul zusammenzufassen, zum Verfahren mit alterungsabhängigem wirksamen E-Modul modifiziert.

Obwohl relativ frühzeitig bekannt war (*Freudenthal/Roll* [1.19], *Wagner* [1.20]), daß aus der Annahme spannungsproportionalen Kriechens erhebliche Fehleinschätzungen resultieren, wenn die Betonspannungen oberhalb des Gebrauchslastniveaus liegen, baut der überwiegende Teil der heute vorhandenen Berechnungsverfahren auf einer linearen Kriechtheorie auf. Dafür gibt es zwei Gründe. Einerseits sind für die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens sehr viel komplexere Bestimmungsgleichungen erforderlich, die sich im allgemeinen nur mit unangemessen hohem Aufwand lösen lassen, andererseits ist es meist ausreichend, die Berechnung unter Zugrundelegung der linearen Kriechtheorie durchzuführen, da bei dem größten Teil der in der Praxis vorkommenden Probleme die kriecherzeugende Dauerlast unterhalb der Gebrauchslastgrenze liegt.

Die seit längerer Zeit rege Forschungstätigkeit auf dem Gebiet des nichtlinearen Kriechens ist vor allem darauf ausgerichtet, über die Klärung strukturverändernder Prozesse im Beton eine

allgemeingültige mathematische Beziehung für das Kriechen unter hoher Dauerbelastung abzuleiten. Insbesondere die neueren Arbeiten von *Streit* [1.21] und *Bazant* [1.22], [1.23] trugen wesentlich zur Klärung der in der Betonstruktur ablaufenden Prozesse bei.

Der Versuch, die Auswirkungen des Kriechens und Schwindens auf Stahlbeton- und Spannbetontragwerke rechnerisch zu erfassen, führte in den vergangenen Jahrzehnten zu einer kaum noch zu überschauenden Vielfalt an Verfahren zur Ermittlung der zeitabhängigen Schnittgrößen, Spannungen und Verformungen. Bei der Ableitung der Berechnungsmodelle war es zumeist wünschenswert, einen geschlossenen Lösungsansatz zur Ermittlung der unbekannten Größen zu erhalten.

Diese Forderung läßt sich für einfache Probleme durch Lösen der Differentialgleichung nach *Dischinger* erfüllen. Dieser Sachverhalt und der zur damaligen Zeit vorhandene Erkenntnisstand führte dazu, daß eine Vielzahl von Berechnungsverfahren für unterschiedliche Problemkreise aus der *Dischingerschen* Differentialgleichung hergeleitet wurden. In dem Bestreben, die sich aus der Alterungstheorie ergebenden Ungenauigkeiten auszuschließen, wurde das Verfahren von *Dischinger* durch *Rüsch* und *Jungwirth* [1.24] dahingehend modifiziert, daß die verzögert elastische Verformung sofort und in voller Größe auf die elastische Verformung angerechnet wird. Die sich als Konsequenz dieser Annahme ergebende erweiterte Dischinger-Differentialgleichung kann ebenfalls für spezielle Fälle gelöst werden. In den letzten Jahren hat sich das Verfahren mit Alterungsbeiwert nach *Trost* [1.17] durchgesetzt. Die Vorteile dieses Verfahrens liegen in seiner universellen Einsetzbarkeit und der relativ wirklichkeitsnahen Erfassung des zeitabhängigen Betonverhaltens.

Mit Entwicklung der Rechentechnik rücken zunehmend Verfahren, die auf numerischen Lösungsansätzen aufbauen, in den Mittelpunkt des Interesses. Der sich dabei ergebende erhebliche Rechenaufwand kann von geeigneten Computerprogrammen übernommen werden, so daß der Vorteil der genauen Beschreibung des Materialverhaltens, auch bei komplizierter Lastgeschichte, ohne unvertretbar hohen zeitlichen Aufwand in Anspruch genommen werden kann.

Weitreichende Erläuterungen zu den obengenannten und zu anderen Verfahren finden sich z.B. in [1.24]-[1.30].

Während die Berechnungsmodelle anfänglich unter Voraussetzung des ungerissenen Betons hergeleitet wurden, ergab sich besonders mit der Entwicklung der teilweisen Vorspannung, sowie dem Wunsch, daß zeitabhängige Verformungsverhalten schlaff bewehrter Betonkonstruktionen, insbesondere druckbeanspruchter Tragglieder, wirklichkeitsnah abschätzen zu können, ein Bedarf an Berechnungsverfahren, mit denen neben dem Kriechen und Schwinden auch die Rißbildung des Betons erfaßt werden konnte. Ausgangspunkt für solche Berechnungsmodelle sind zumeist die obengenannten Verfahren, wobei die Berechnung in Abhängigkeit der Druckzonengröße im gerissenen Querschnitt durchgeführt wird. Dabei werden die Querschnittswerte im Zustand II entweder für spezielle Fälle im voraus bestimmt oder während der Berechnung iterativ ermittelt.

Auf Grundlage der Dischinger-Gleichung leiten *Hampe* und *Köppler* [1.31], [1.32] praktische Formeln zur Berechnung einfach bewehrter, gerissener Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte her. Dabei gehen sie von einer trapezförmigen Verteilung der Betonspannungen in der Druckzone aus.

Unter Annahme einer dreieckförmigen Betonspannungsverteilung leitet *Krüger* [1.33] Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der zeitabhängigen Spannungsumlagerungen zwischen Beton und Bewehrung in einfach und doppelt bewehrten Stahlbetonquerschnitten im

Zustand II ab. Das Berechnungsverfahren basiert dabei auf der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers, wobei die Integralgleichung näherungsweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung in einen algebraischen Ausdruck überführt wird. In [1.34] wird der Anwendungsbereich dieses Verfahrens auf Spannbetonquerschnitte erweitert, mit der Präzisierung, daß die Spannungs- und Dehnungsnulllinie bei Berücksichtigung des Kriechens nicht mehr übereinstimmen. Für den Fall eines zentrisch gedrückten Stahlbetonquerschnitts ist auch die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens möglich.

Ein Verfahren, bei dem die Parameter der Betondruckzone im gerissenen Querschnitt zu jedem Betrachtungszeitpunkt iterativ bestimmt werden, wird von *Frey* und *Trost* in [1.35] angegeben. Das Berechnungsmodell geht dabei von dem Verfahren mit Alterungsbeiwert nach *Trost* und der Übereinstimmung von Spannungs- und Dehnungsnulllinie aus, wenn die Schwindverformung vernachlässigt wird. Mit dem Verfahren lassen sich auch die Schnittgrößenumlagerungen in statisch unbestimmten Tragwerken ermitteln.

Für die Lösung von Querschnittsproblemen unter Berücksichtigung der Rißbildung im Zusammenhang mit dem zeitabhängigen Betonverhalten existieren eine Reihe weiterer Verfahren, die auf der algebraischen Spannungsdehnungs-Zeit-Beziehung mit Alterungsbeiwert nach *Trost* basieren und auf eine iterative Suche der Spannungsnulllinie [1.36] oder auf aufbereitete Hilfsmittel [1.37], [1.38] angewiesen sind.

In [1.39] wird von *Raue* ein Berechnungsverfahren zur Ermittlung der zeitabhängigen Verformungen und Spannungen in vorgespannten Verbundquerschnitten unter Biege- und Normalkraftbeanspruchung angegeben. Die Vorspannung wird dabei als außermittig angreifende Längsdruckkraft behandelt. Analog zu *Krüger* werden die zur Beschreibung der Theorie des elastisch kriechenden Körpers notwendigen Integralgleichungen durch den Mittelwertsatz der Integralrechnung angenähert. Das unter Berücksichtigung der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen hergeleitete Gleichungssystem zur Ermittlung der unbekannten Größen wird in ein quadratisches Optimierungsproblem überführt und anschließend mit Hilfe mathematischer Optimierungsmethoden gelöst, wobei sich die unterschiedliche Lage der Spannungs- und Dehnungsnulllinie zu jedem Zeitpunkt $t > t_0$ automatisch ergibt. Die Rißbildung des Betons läßt sich dabei nach Zerlegung des Gesamtquerschnitts in mehrere Schichten geringer Dicke durch die Einführung zusätzlicher Restriktionen berücksichtigen, ohne das Berechnungsmodell prinzipiell verändern zu müssen.

Die gleichzeitige Berücksichtigung von physikalischen und geometrischen Nichtlinearitäten im Zusammenhang mit Untersuchungen zum Langzeitverhalten schlaff bewehrter und vorgespannter Betonelemente erfordert wesentlich komplexere und berechnungsintensivere Algorithmen. Für die Abschätzung der Auswirkungen des Kriechen und Schwindens auf längskraftbeanspruchte Bauteile wurden deshalb eine Reihe von Verfahren erarbeitet, die den Charakter von Näherungslösungen haben (z.B. [1.40], [1.41], [1.42]), sich aber durch relativ einfach zu handhabende Bestimmungsgleichungen auszeichnen.

Bei Vorliegen komplexer Lastgeschichten, wechselnder Umweltbedingungen oder Änderungen des statischen Systems ist die Berechnung im allgemeinen an eine numerische Vorgehensweise gebunden. Der gesamte Betrachtungszeitraum ist dabei in eine mehr oder weniger große Anzahl finiter Zeitintervalle zu zerlegen, in denen die jeweiligen Änderungen der gesuchten Größen schrittweise unter Einbeziehung der vorausgegangenen Belastungsgeschichte berechnet werden. Innerhalb jedes Zeitschritts sind zusätzliche Iterationen zur Berücksichtigung der Rißbildung und geometrisch nichtlinearer Einflüsse notwendig.

Auf dieser Vorgehensweise basieren die Untersuchungen von *Bazant* und *Tsubaki* [1.43] zum Stabilitätsverhalten langzeitbelasteter Stahlbetonstützen. Durch das verwendete

Berechnungsmodell kann neben geometrisch nichtlinearen Einflüssen auch die Nichtlinearität des Kriechens unter hoher Spannung berücksichtigt werden. Auf die Behandlung der Rißbildung des Betons wird in dem Beitrag [1.43] nur am Rande eingegangen. Demnach wird die Mitwirkung des Betons auf Zug ausgeschlossen.

Im Zusammenhang mit der nichtlinearen Berechnung langzeitbelasteter Flächentragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton ist das Programmsystem FESIA zu erwähnen, daß im Rahmen mehrerer Dissertationen [1.44], [1.45], [1.46] am Institut für Festigkeitslehre der TU Wien entwickelt wurde. Der Vorteil des Programmsystems besteht in seiner flexiblen Anwendbarkeit unter Berücksichtigung einer Vielzahl geometrisch und physikalisch nichtlinearer Effekte. Mit der implementierten Kriechfunktion läßt sich ebenfalls das nichtlineare Kriechen des Betons erfassen. Allerdings führt die verwendete Integraltypformulierung bei Verwendung eines nichtlinearen Kriechgesetzes zu prinzipiellen Ungenauigkeiten bei der Beschreibung der Langzeitdeformationen, wie im Verlauf der Arbeit noch gezeigt wird.

Ein Überblick zu weiteren Arbeiten, in denen das zeitabhängige Tragverhalten von Stahlbetonstrukturen unter Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität behandelt wird, findet sich in [1.47]. In den an dieser Stelle aufgeführten Verfahren ist eine Beschreibung des nichtlinearen Kriechens nur in eingeschränkter Form oder gar nicht möglich. Desweiteren sind dem Verfasser derzeit keine sonstigen aufbereiteten Berechnungsverfahren bekannt, mit denen sich Rißbildungen und Plastizierungen, sowie geometrisch nichtlineare Effekte in präziser Weise mit dem nichtlinearen zeitabhängigen Verformungsverhalten des Betons kombinieren lassen.

2 Materialverhalten von Beton unter kurzzeitiger und langzeitiger Belastung und seine mathematische Beschreibung

2.1 Einfluß der Struktur auf das Festigkeits- und Formänderungsverhalten des Betons

2.1.1 Strukturbildung und Veränderung der Betonstruktur infolge einachsiger Kurzzeitbelastung

Der Begriff Beton bezeichnet ein Konglomerat, das sich aus Zement sowie groben und feinen Zuschlagstoffen zusammensetzt. Der Zement wirkt dabei als Bindemittel, durch das die einzelnen Zuschlagstoffkörner untereinander verkittet sind. Durch zusätzliche Beigabe von Zusatzstoffen bzw. Zusatzmitteln können die Eigenschaften des Betons beeinflusst werden. Das Betongemisch erhärtet durch chemische Reaktion des Zements und der Zusätze mit dem Wasser und bildet im erhärteten Zustand den Zementstein als geschlossene Phase (Matrix), in welcher die Zuschlagstoffe als disperse Phase verteilt sind. Diese Strukturbildung ist ein zeitabhängiger Prozeß und spiegelt sich in der Zeitabhängigkeit der Materialkenngrößen des Betons wieder.

Aufgrund der zumeist wesentlich dichteren Struktur der Zuschlagstoffe gegenüber der Struktur des Zementsteins wird das Festigkeits- und Formänderungsverhalten des Betons vor allem durch die Eigenschaften des Zementsteins bzw. durch die Struktur der Kontaktzonen zwischen Zementstein und Zuschlagstoffen bestimmt.

In den Kontaktzonen sind bereits im unbelasteten Zustand Mikrorisse zwischen Zementstein und Zuschlagstoff vorhanden, die aus der geringeren Festigkeit der Kontaktzone und der Behinderung des Schwindens des Zementsteins durch die steiferen Betonzuschläge resultieren. Diese Mikrorisse beeinflussen die mechanischen Eigenschaften des erhärteten Betons wesentlich und bilden den Ausgangspunkt der weiteren Rißentwicklung bei Druck- oder Zugbeanspruchung [2.1,2.2,2.3].

Im Unterschied zu den Betonausgangsstoffen, Zementstein und Zuschlagstoff, ist das Verformungsverhalten des Betons bereits weit vor Erreichen der Bruchlast durch ein überproportionales Anwachsen der Dehnungen im Verhältnis zur aufgebrachten Spannung gekennzeichnet. Ursache dafür ist das fortschreitende Wachstum der bereits vorhandenen Mikrorisse in den Kontaktzonen. Diese Grenzspannung definiert den Maximalwert des Bereiches, in dem die Näherung eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung mit ausreichender Genauigkeit als Berechnungsgrundlage angewendet werden kann. Nach [2.4] liegt sie zwischen 30% und 50% der Betondruckfestigkeit.

Übersteigen die Spannungen etwa 80% der Betondruckfestigkeit, entwickeln sich die Risse zumeist parallel zur äußeren Beanspruchung in die Zementmatrix weiter. Bei fortschreitender Belastung vereinigen sich die kleinen Risse zu größeren, bis die Länge der Mikrorisse einen kritischen Wert überschritten hat. Der zugehörige Spannungswert wird als Betondruckfestigkeit bezeichnet. Bei lastgesteuerter Versuchsanordnung versagt der Beton bei Erreichen dieses Grenzwerts schlagartig, wogegen bei verformungsgesteuerter Versuchsanordnung die Stauchungen bei gleichzeitiger Abnahme der Betonspannungen weiter zunehmen. Das damit einhergehende langsame bzw. stabile Anwachsen der Mikrorisse bei steigender mittlerer Dehnung führt zu dem abfallenden Ast in der Spannungs-Dehnungslinie nach Erreichen der Betondruckfestigkeit [2.1].

Bei gleichmäßig verteilter einachsiger Zugbeanspruchung wachsen die in den Kontaktzonen bereits vorhandenen Mikrorisse erst bei etwa 70% der Betonzugfestigkeit an, d.h. bis zu diesem Belastungsgrad besteht ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen Betondehnung und Zugspannung. Bei Überschreiten der Grenzzugspannung erfolgt das Rißwachstum senkrecht zur Beanspruchungsrichtung, wobei sich an größeren Fehlstellen bzw. Kerben sogenannte Prozeßzonen ausbilden. Die Prozeßzonen übertragen zwar noch Zugspannungen, mit steigender Beanspruchung können sie jedoch bis zur Bildung eines ausgeprägten Risses immer weniger Spannungen aufnehmen. Mit der Reduzierung der Spannungen entsteht auch bei Zugbeanspruchung ein abfallender Ast in der Spannungs-Dehnungslinie, der in der weiteren Mikroriß- und Prozeßzonenbildung begründet ist [2.1].

Da bei größeren Strukturen eine Beschreibung des Materialverhaltens im Mikro- bzw. Mesobereich aus Gründen des unvermeidbaren Modellierungs- und Berechnungsaufwandes nicht möglich ist, wird der Beton trotz seiner stofflichen Inhomogenität bei der Tragwerksberechnung als homogenes Material betrachtet, wobei die durch äußere Einwirkungen und Umgebungsbedingungen hervorgerufenen strukturellen Veränderungen durch die Veränderlichkeit der Materialkenngrößen berücksichtigt werden.

2.1.2 Langzeitverhalten des Betons

Zusätzlich zu den in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Formänderungen treten mit fortschreitender Zeitdauer weitere Verformungen auf. Bei diesen zeitabhängigen Verformungen kann im wesentlichen zwischen dem Schwinden als beanspruchungs-unabhängige Verformung und dem Kriechen als beanspruchungsabhängige Verformung unterschieden werden.

Das Schwinden ist definiert als Volumenabnahme des Betons im unbelasteten Zustand. Diese Volumenabnahme wird zum einen durch die Austrocknung des Betons und zum anderen durch die Karbonatisierung infolge chemischer Reaktion des Zementsteins mit dem Kohlendioxid der Luft ausgelöst. Die Austrocknungsgeschwindigkeit über den Querschnitt ist nicht konstant. In oberflächennahen Bereichen ist das Feuchtgleichgewicht schon nach kurzer Zeitdauer hergestellt, während im Querschnittsinneren auch nach mehreren Jahren eine noch sehr hohe relative Feuchtigkeit vorhanden sein kann [2.1]. Infolge dieses Feuchtigkeitsgefälles wird ein Diffusionsprozeß ausgelöst, der sehr langsam abläuft und durch den sich die Volumenabnahme je nach Bauteildicke über mehrere Jahrzehnte fortsetzt. Aus der ungleichförmigen Austrocknung resultieren ungleichförmige freie Schwinddehnungen über den Betonquerschnitt, die einen Eigenspannungszustand im Querschnitt, d.h. Zugspannungen in oberflächennahen Bereichen und Druckspannungen in oberflächenfernen Bereichen, hervorrufen. Bei statisch unbestimmten Systemen werden durch die Behinderung der mittleren Schwinddehnung und der Schwindkrümmung zusätzlich Zwangsspannungen erzeugt, die sich mit den Eigenspannungen überlagern. Durch den so vorhandenen Spannungszustand wird der Kriechprozeß ausgelöst, der einen Abbau der durch das Schwinden hervorgerufenen Spannungsspitzen bewirkt.

Neben den Eigen- und Zwangsspannungen treten zusätzliche Gefügespannungen auf, deren Ursache in der Behinderung der Schwindverformung des Zementsteins durch die steiferen Zuschläge liegt. Dadurch entstehen Druckspannungen im Zuschlagstoff und Zugspannungen in der Zementsteinmatrix, die für die Mikrorisse in den Kontaktzonen im unbelasteten Zustand verantwortlich sind (siehe Abschnitt 2.1.1).

Als Kriechverformungen werden diejenigen Verformungen bezeichnet, die durch die Kombination von Spannung und Zeit hervorgerufen werden. Das Betonkriechen wird fast ausschließlich durch das Kriechen des Zementsteins ausgelöst, da die Zuschläge im allgemeinen nicht kriechen. Die Gesamtkriechverformung des Betons setzt sich aus einem reversiblen Anteil, der verzögert elastischen Verformung, und aus einem irreversiblen Anteil, dem Fließen, zusammen. Da das Kriechen durch den Platzwechsel von Wassermolekülen im Zementsteingel und damit verbundenen Gleit- und Verdichtungsvorgängen zwischen den Gelpartikeln ausgelöst wird, ist der Wassergehalt des Betons bei Belastungsbeginn für die Größe der Kriechverformung wesentlich. Dieser Vorgang wird als Grundkriechen bezeichnet. Die sich dadurch einstellende zeitabhängige Verformung entspricht der Gesamtkriechverformung, wenn eine Austrocknung während des Belastungszeitraums verhindert wird. Ist eine gleichzeitige Austrocknung des Betons während der Belastung möglich, werden die Kriechvorgänge beschleunigt, so daß der mögliche Wasserverlust während der Belastung ein zusätzlicher entscheidender Parameter für die Größe der Kriechverformung ist. Diese zusätzliche Kriechverformung wird als Trocknungskriechen bezeichnet und läuft annähernd affin zur Schwindverformung ab [2.5,2.6].

Die Kriechverformungen verhalten sich im Bereich niedriger Spannungen annähernd proportional zu den kriecherzeugenden Spannungen (lineares Kriechen). Ab einem bestimmten Spannungsgrenzwert von etwa 25% bis 40% der Druckfestigkeit steigen die Kriechverformungen im Vergleich zur kriecherzeugenden Spannung überproportional an (nichtlineares Kriechen), was auf ein Fortschreiten der Mikrorißbildung unter Dauerlast zurückzuführen ist [2.7,2.8,2.9].

Die fortschreitende Mikrorißbildung resultiert aus Spannungsumlagerungen vom kriechfähigen Zementstein auf die steiferen Zuschläge und der damit erhöhten Beanspruchungen der Verbundbereiche in den Kontaktzonen. Bei Überschreiten der maximal aufnehmbaren Verbundspannungen an den Rißufern tritt eine Verlängerung bzw. Vereinigung bereits vorhandener Risse ein. Die durch diesen Vorgang erhöhte Rißdichte kann dabei das 3-fache (bei Belastung in hohem Betonalter das 4-fache) der sich unter kurzzeitiger Belastung einstellenden Rißdichte betragen [2.4].

Dem weiteren Anwachsen der Rißdichte wirkt vor allem bei Belastung im jungen Betonalter die fortschreitende Hydratation entgegen, die die sogenannte Selbstheilung des Betons bewirkt. Der Zeitpunkt, an dem die Rißdichte ihren maximalen Wert erreicht und ab dem ein Versagen unter konstanter Belastungsgröße ausgeschlossen werden kann, wird als kritische Standzeit, die zugehörige minimale Betondruckfestigkeit als Dauerstandsfestigkeit bezeichnet.

Übersteigt die aufgebrachte Spannung die Dauerstandsfestigkeit (ca. 80% der Kurzzeitfestigkeit), wachsen die Trennrisse in der Zementmatrix, die sich bei hohem Belastungsniveau direkt zum Zeitpunkt des Spannungseintrags gebildet haben (Abschn. 2.1.1), mit zunehmender Belastungsdauer weiter an, bis der zeitlich verzögerte Betonbruch eintritt.

Bei der Betrachtung der last- und zeitabhängigen Vorgänge in der Betonstruktur wird deutlich, daß die Nichtlinearitäten im Betonverhalten sowohl unter kurzzeitig als auch unter langfristig einwirkender Belastung durch analoge strukturmechanische Veränderungen hervorgerufen werden.

2.2 Festigkeits- und Formänderungskenngrößen des Betons

2.2.1 Druckfestigkeit

Die Druckfestigkeit ist die wichtigste bautechnische Kenngröße des Betons. Bei normalfestem Beton ist sie vor allem von der Zementsteindruckfestigkeit abhängig, die wiederum von der Zementnormfestigkeit und dem Zementsteinporenraum beeinflusst wird. Die Größe des Porenraums wird durch den Wasserzementwert, den Verdichtungsgrad und den Grad der Hydratation bestimmt. Der wesentlichste Einflußfaktor ist der Wasserzementwert w/z , der damit neben der Zementnormfestigkeit den wichtigsten Eingangswert bei der Betonprojektierung darstellt.

In nationalen und internationalen Normen wird eine Klassifikation des Betons aufgrund seiner Druckfestigkeit vorgenommen, wobei die Festlegungen über die Prüfbedingungen bei der Bestimmung der Betondruckfestigkeit von Norm zu Norm unterschiedlich sein können.

Ein mathematischer Ansatz für die zeitliche Entwicklung der Druckfestigkeit infolge Nacherhärtung wird z.B. im CEB-FIP Model Code MC 90 [2.10] angegeben. Die Ermittlung der mittleren Betondruckfestigkeit $f_{cm}(t)$ zum Zeitpunkt t erfolgt in Abhängigkeit der mittleren 28-Tage Betondruckfestigkeit f_{cm} , der Temperatur und der Zementart.

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm} \quad (2.2.1-1)$$

$$\beta_{cc}(t) = \exp \left\{ s \left[1 - \left(\frac{28}{t_T / t_1} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (2.2.1-2)$$

Dabei ist t_T das wirksame Betonalter unter Berücksichtigung des Temperatureinflusses, $t_1 = 1$ Tag und s ein von der Zementart abhängiger Beiwert (Tabelle 2.2.1-2).

Tabelle 2.2.1-2: Beiwert s zur Ermittlung der zeitabhängigen Druckfestigkeit [2.10]

| Zementart | langsam erhärtend (SL) | normal und schnell erhärtend (N,R) | schnell erhärtend hochfest (RS) |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------------------|------------------------------------|
| Zementfestigkeitsklasse | Z 35 L | Z 35 F, Z 45 L | Z 45 F, Z 55 |
| Beiwert s | 0.38 | 0.25 | 0.20 |

Zur näherungsweisen Erfassung des Temperatureinflusses auf die Nacherhärtung kann das wahre Betonalter t durch ein wirksames Betonalter t_T ersetzt werden, das dem Betonalter entspricht, zu dem der Beton die gleiche Festigkeit unter Voraussetzung einer konstanten Referenztemperatur erreichen würde. Die Beziehung, die die Beschleunigung der Nacherhärtung bei steigender Temperatur beschreibt, wird auch als *Reifeformel* des Betons bezeichnet. In [2.10] wird von einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen Temperatur und Reifegrad des Betons ausgegangen, wobei die Referenztemperatur, bei der das wirksame Betonalter dem wahren Betonalter entspricht, mit $T = 20^\circ\text{C}$ angenommen wird.

$$t_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left[13.65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i) / T_0} \right] \quad (2.2.1-3)$$

In der Gleichung (2.2.1-3) ist t_T das wirksame Betonalter unter Berücksichtigung des Temperatureinflusses, Δt_i bezeichnet den Zeitraum, in dem die Temperatur T vorhanden ist, $T(\Delta t_i)$ ist die Betontemperatur in °C während des Zeitraums Δt_i , und T_0 stellt eine Bezugsgröße mit dem Wert $T_0 = 1^\circ\text{C}$ dar.

Bei der Ermittlung der Dauerstandsfestigkeit wird im allgemeinen von der Betonfestigkeit unter Berücksichtigung der Nacherhärtung ausgegangen. Im CEB-FIP Model Code 90 [2.10] wird dafür folgende analytische Beziehung angegeben:

$$f_{cm,sus}(t, t_0) = f_{cm} \beta_{cc}(t) \beta_{c,sus}(t, t_0), \quad (2.2.1-4)$$

$$\beta_{c,sus}(t, t_0) = 0.96 - 0.12 \left\{ \ln \left[72 \left(\frac{t - t_0}{t_1} \right) \right] \right\}^{1/4}, \quad (2.2.1-5)$$

wobei der Dauerstandseinfluß für eine Belastungsdauer $(t - t_0) > 0.015$ Tage (=20 min) durch den Beiwert $\beta_{c,sus}(t, t_0)$ berücksichtigt wird. Weiterhin ist $\beta_{cc}(t)$ der Beiwert zur Berücksichtigung der Nacherhärtung nach Gl. (2.2.1-2), t_0 bezeichnet das Betonalter bei Belastung in Tagen und t_1 das Bezugsalter, das mit $t_1 = 1$ Tag angesetzt wird.

In Abb. 2.2.1-1 ist die Vorhersage des Dauerstandsverhaltens nach CEB-FIP MC 90 für unterschiedliche Belastungsalter dargestellt.

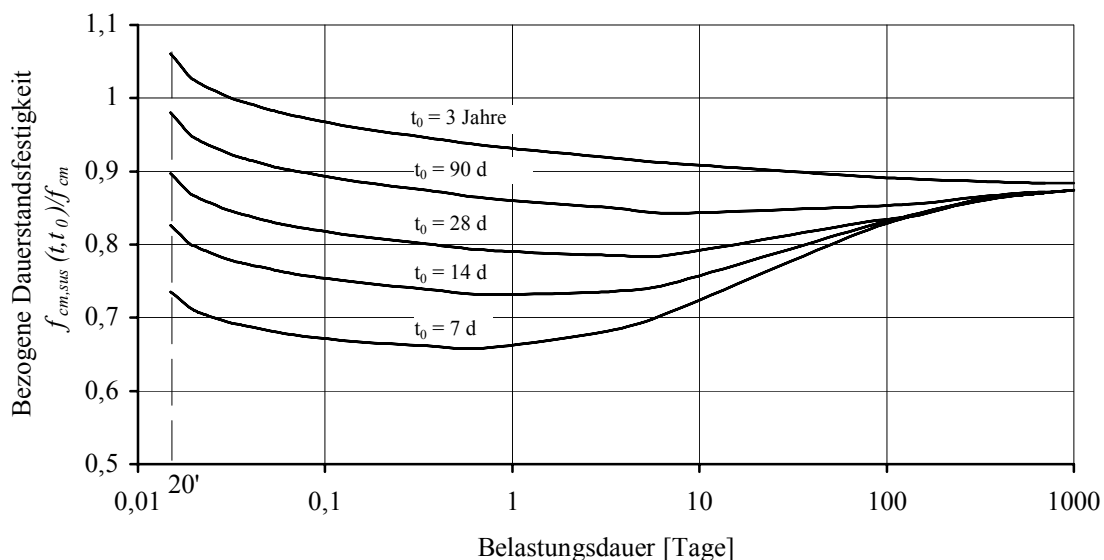


Abb. 2.2.1-1: Vorhersage des Dauerstandsverhaltens für verschiedene Belastungsalter nach CEB-FIP MC 90 [2.10]

2.2.2 Zugfestigkeit

Bei der Bemessung von Stahlbetonkonstruktionen wird ein Mitwirken des Betons bei der Aufnahme der Zugkräfte in den kritischen Schnitten aufgrund seiner geringen Zugfestigkeit zumeist ausgeschlossen, so daß im allgemeinen nur die Druckfestigkeit des Betons als Kriterium für die Beurteilung der Querschnittstragfähigkeit herangezogen wird. Die Zugfestigkeit erlangt ihre Bedeutung bei der Berechnung solcher Konstruktionen, bei denen die Rißbildung des Betons aus Gründen der Gebrauchstauglichkeit ausgeschlossen werden muß. Auch bei der Berücksichtigung des Mitwirkens des Betons auf Zug zwischen den Rissen („tension stiffening“-Effekt) und wenn Tragwerksverformungen bei der Schnittgrößen-ermittlung zu berücksichtigen sind, ist die wirklichkeitsnahe Abschätzung der Größe der Betonzugfestigkeit unerlässlich.

Die Bestimmung der Zugfestigkeit, insbesondere der zentrischen Zugfestigkeit, ist mit einer Reihe versuchstechnischer Probleme behaftet, die vor allem aus den Schwierigkeiten bei der Krafteinleitung resultieren und zu großen Streuungen in den Versuchsergebnissen führen. Aus diesem Grund wird anstelle der zentrischen Zugfestigkeit die Spaltzugfestigkeit oder die Biegezugfestigkeit ermittelt, aus denen sich die zentrische Betonzugfestigkeit über Näherungsformeln ableiten läßt.

In [2.10] werden für die Ermittlung der zentrischen Zugfestigkeit aus der Spaltzugfestigkeit bzw. aus der Biegezugfestigkeit folgende Näherungsformeln angegeben:

$$f_{ctm} = 0.9 f_{ct,sp} \quad (2.2.2-1)$$

$$f_{ctm} = f_{ct,fl} \frac{1.5(h_b / h_0)^{0.7}}{1 + 1.5(h_b / h_0)^{0.7}} \quad (2.2.2-2)$$

Dabei ist f_{ctm} der Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit, $f_{ct,sp}$ der Mittelwert der Spaltzugfestigkeit und $f_{ct,fl}$ der Mittelwert der Biegezugfestigkeit. In Gl. (2.2.2-2) ist der Einfluß der Balkenhöhe auf die Biegezugfestigkeit durch das Verhältnis h_b / h_0 berücksichtigt, wobei h_b die Höhe des Balkens ist, an dem die Biegezugfestigkeit bestimmt wurde. Die Bezugshöhe h_0 wird mit 100 mm angegeben.

Für die Bestimmung der Obergrenze $f_{ctk,max}$, der Untergrenze $f_{ctk,min}$ und des Mittelwerts f_{ctm} der Zugfestigkeit aus der charakteristischen Druckfestigkeit f_{ck} gelten nach [2.10] die Zusammenhänge:

$$f_{ctk,min} = f_{ctko,min} (f_{ck} / f_{cko})^{2/3} \quad (2.2.2-3)$$

$$f_{ctk,max} = f_{ctko,max} (f_{ck} / f_{cko})^{2/3} \quad (2.2.2-4)$$

$$f_{ctm} = f_{ctko,m} (f_{ck} / f_{cko})^{2/3} \quad (2.2.2-5)$$

In den Gln. (2.2.2-3..5) sind:

$$\begin{aligned} f_{cko} &= 10 \text{ N/mm}^2 \text{ als Bezugswert} \\ f_{ctko,min} &= 0.95 \text{ N/mm}^2 \\ f_{ctko,max} &= 1.85 \text{ N/mm}^2 \\ f_{ctko,m} &= 1.40 \text{ N/mm}^2 \text{ als Grundwerte der Betonzugfestigkeit} \end{aligned}$$

Die relativ großen Schwankungen sind darin begründet, daß eine relativ große Anzahl von Eingangsgrößen die Haftung der Zuschlagkörner am Zementstein und damit die Zugfestigkeit des Betons beeinflussen. Diese Einflußgrößen sind vor allem die Form, Größe und Festigkeit der Zuschlagstoffe, der Wasser-Zement-Wert und Umwelteinflüsse. So rufen Dauertemperaturbeanspruchungen und Schwinden infolge Austrocknung Gefügespannungen im Beton hervor, die einerseits in dem unterschiedlichen Wärmedehnungsverhalten von Zementstein und Zuschlag begründet sind und andererseits daraus resultieren, daß die Volumenverringerung infolge Austrocknung des Zementsteins durch die Zuschlagstoffkörner behindert wird. Diese Gefügespannungen haben auf die Zugfestigkeit einen größeren Einfluß als auf die Druckfestigkeit [2.2] und machen eine Vorhersage der zeitlichen Entwicklung der Zugfestigkeit wesentlich komplizierter als die Vorhersage der zeitabhängigen Druckfestigkeit. In [2.10] wird ab einem Betonalter von 28 Tagen näherungsweise von einem affinen Verlauf der Zugfestigkeitsentwicklung zur Druckfestigkeitsentwicklung ausgegangen, so daß Gl. (2.2.1-1) zur Abschätzung herangezogen werden kann, wobei die mittlere Druckfestigkeit durch die mittlere Zugfestigkeit zu ersetzen ist.

Eine weitere Abhängigkeit ergibt sich aus der Betonierrichtung, da ein Absacken des Zementleims unter den Zuschlagstoffkörnern eine Schwächung der Haftung zwischen Zuschlagstoff und Zementstein bedeutet. Daraus folgt, daß die Zugfestigkeit in vertikaler Richtung geringer ist als in horizontaler Richtung [2.11].

2.2.3 Elastizitätsmodul

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Verformung des Betons unter einachsiger Kurzzeitbelastung kann im Bereich niedriger Spannungen ($-0.4f_c \leq \sigma_c \leq 0.7f_{ct}$) näherungsweise durch das Hookesche Gesetz nach Gl. (2.2.3-1) beschrieben werden.

$$E_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} \quad (2.2.3-1)$$

Der Elastizitätsmodul E_c gibt das Verhältnis von aufgebrachter Spannung σ_c und eingetretener Dehnung ε_c an und wird als Tangentenmodul im Ursprung $E_{c,tg}$ bzw. als Sekantenmodul $E_{c,sek}$ definiert. So wird in DIN 1045 [2.12] und EC 2 [2.13] ein E-Modul für Druckbeanspruchung angegeben, der zu einem Betonalter von 28 Tagen als Sekantenmodul für die Prüfdruckspannung $-\sigma_c = 1/3f_c$ ermittelt wird und im Bereich $-0.4f_c \leq \sigma_c \leq 0$ gilt. Dabei werden die Probekörper zehnmal vorbelastet, um den Einfluß bleibender, viskoser und verzögert elastischer Verformungen auszuschließen.

Im Unterschied dazu wird im MC 90 [2.10] der Elastizitätsmodul als Tangentenmodul im Ursprung definiert, dessen Größe annähernd dem Anstieg der Sekante des Entlastungsastes bei schneller Entlastung entspricht.

Unter Zugbeanspruchung kann für den E-Modul der gleiche Wert wie bei Druckbeanspruchung angenommen werden.

Da die Größe des Elastizitätsmoduls mit steigender Betonfestigkeit zunimmt, läßt sich dieser näherungsweise aus der Druckfestigkeit bestimmen. Im EC 2 [2.13] wird der Zusammenhang zwischen dem Mittelwert des Sekantenmoduls des Betons $E_{c,m}$ und der charakteristischen Betondruckfestigkeit f_{ck} wie folgt angegeben:

$$E_{cm} = 9.5 \cdot 10^3 (f_{ck} + 8)^{1/3}. \quad (E_{cm}, f_{ck} \text{ in [N/mm}^2\text{]}) \quad (2.2.3-2)$$

Zur Berechnung des Tangentenmoduls aus der Betondruckfestigkeit wird im CEB-FIP Model Code 90 eine ähnliche Beziehung verwendet.

$$E_{ci} = E_{co} \left[(f_{ck} + \Delta f) / f_{cmo} \right]^{1/3} \quad (2.2.3-3)$$

Dabei ist E_{ci} der Elastizitätsmodul in [N/mm²] bei einem Betonalter von 28 Tagen, f_{ck} ist die charakteristische Druckfestigkeit in [N/mm²] und mit $E_{co} = 2.15 \cdot 10^4$ N/mm² wird der Grundwert des E-Moduls bezeichnet. Weiterhin sind $\Delta f = 8$ N/mm² bzw. $f_{cmo} = 10$ N/mm².

Die mit den Gln.(2.2.3-2,3) ermittelten Werte können nur als Abschätzung angesehen werden, da die Elastizitätsmoduln bei Betonen gleicher Festigkeit erheblichen Schwankungen unterworfen sein können, wenn verschiedenartige Zuschlagstoffe verwendet wurden. Um eine genauere Vorhersage zu gewährleisten, wurden in [2.10, 2.14] Korrekturfaktoren zur Berücksichtigung unterschiedlicher Zuschlagstoffarten eingeführt. Der Elastizitätsmodul ergibt sich demnach zu:

$$E_c = \alpha_E E_{ci} \quad \text{bzw.} \quad E_c = \alpha_E E_{cm} \quad (2.2.3-4)$$

mit

| | | | |
|------------|---|-----|-----------------------------------|
| α_E | = | 1.2 | für Basalt und dichten Kalkstein, |
| α_E | = | 1.0 | für Quarz und Quarzite, |
| α_E | = | 0.9 | für Kalkstein, |
| α_E | = | 0.7 | für Sandstein. |

Wie die Betonfestigkeit ist auch der Elastizitätsmodul vom Hydratationsgrad der Zementstein-matrix abhängig und entwickelt sich mit fortschreitender Zeitdauer. Allerdings verläuft die Entwicklung schneller als bei der Betondruckfestigkeit. Die Beziehungen zur Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit des E-Moduls entspricht in ihrer Struktur der Gl. (2.2.1-1) zur Berücksichtigung der zeitlichen Entwicklung der Betondruckfestigkeit.

Nach MC 90 kann die Zeitabhängigkeit des Betonelelastizitätsmoduls durch Gl. (2.2.3-6) berücksichtigt werden:

$$E_{ci}(t) = \beta_E(t) E_{ci}, \quad (2.2.3-6)$$

mit

$$\beta_E(t) = [\beta_{cc}(t)]^{0.5}. \quad (2.2.3-7)$$

Dabei ist $E_{ci}(t)$ der Elastizitätsmodul zum Zeitpunkt t , E_{ci} der Elastizitätsmodul im Alter von 28 Tagen nach Gl. (2.2.3-3) und $\beta_{cc}(t)$ ein Beiwert nach Gl. (2.2.1-2).

2.3 Schwinden des Betons - Vorhersageverfahren

In Abschnitt 2.1.2 wurde bereits auf die Definition und die Ursachen des Schwindens eingegangen. Sollen die Auswirkungen des Schwindens bei der Tragwerksberechnung berücksichtigt werden, ist eine genügend genaue Vorhersage der zu erwartenden Verformungen notwendig. Die in nationalen und internationalen Normen bzw. in der sonstigen Fachliteratur angegebenen Verfahren zur Abschätzung der mittleren Schwindverformungen eines Bauteils liefern zum Teil unterschiedliche Ergebnisse. Dies ist zum einen in den verschiedenen Ansätzen der Schwindverlaufsfunctionen begründet, zum anderen hängt das Ergebnis der Schwindvorhersage von der wirklichkeitsnahen Beschreibung der das Endschwindmaß beeinflussenden Parameter ab, die zumeist empirisch aus Versuchsdaten abgeleitet wurden.

Bei der mathematischen Formulierung der Schwindvorhersage wird im allgemeinen davon ausgegangen, daß die Schwindverformungen einem Endwert zustreben. Dieser Endwert stellt sich ein, wenn der gesamte Querschnitt die sogenannte Ausgleichsfeuchte erreicht hat. Aus diesem Grund erfolgt die Formulierung der Schwindverlaufsfunctionen im allgemeinen durch Exponentialfunctionen oder hyperbolische Potenzfunctionen. In Tabelle 2.3-1 sind ausgewählte Beziehungen zur Abschätzung der Schwindverformung zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit des Betonalters bei Beginn des Schwindens t_{sh} zusammengestellt, wobei jeweils die Verlaufsfunction mit dem Endschwindmaß bzw. Grundswindmaß multipliziert wird.

Tabelle 2.3-1: Beziehungen zur Abschätzung der Schwinddehnung

| | Formel | Erläuterungen |
|-----------------------------|---|---|
| DIN 4227 [2.15] | $\varepsilon_{sh}(t, t_{sh}) = \varepsilon_{sh,0} (k_{sh,t} - k_{sh,t_{sh}})$ | $\varepsilon_{sh,0}$ - Grundswindmaß $k_{sh,t}, k_{sh,t_{sh}}$ - Beiwerte zum zeitlichen Ablauf des Schwindens |
| MC 90 [2.10] EC 2 [2.13] | $\varepsilon_{sh}(t, t_{sh}) = \varepsilon_{sh,0} \left(\frac{t - t_{sh}}{0.035 h_0^2 + t - t_{sh}} \right)^{\frac{1}{2}}$ | $\varepsilon_{sh,0}$ - Grundswindmaß h_0 - wirksame Bauteildicke |
| Bazant/Kim [2.16] | $\varepsilon_{sh}(t, t_{sh}) = \varepsilon_{sh,\infty} k_h \tanh \left(\frac{t - t_{sh}}{\tau_{sh}} \right)^{\frac{1}{2}}$ | $\varepsilon_{sh,\infty}$ - Grundswindmaß k_h - Beiwert Luftfeuchte τ_{sh} - Beiwert zur Berücksichtigung von Größe, Form und Betonalter |

Die hier zusammengestellten Verfahren unterscheiden sich nicht nur in der Größe und im zeitlichen Verlauf der Schwinddehnung, sondern auch in den zu berücksichtigenden Eingangsparametern. Für die Abschätzung der Schwinddehnung nach DIN 4227 ist die Kenntnis der wirksamen Körperdicke, der Umgebungsbedingungen und der angenommene Beginn des Schwindvorgangs ausreichend. Vergleiche mit Versuchen zeigen jedoch, daß dieses einfache und damit leicht anzuwendende Verfahren ungenau ist und die Schwindverformungen unterschätzt [2.1]. Ein verbessertes Verfahren ist im EC 2 bzw. MC 90 enthalten, bei dem zusätzlich die Betondruckfestigkeit und die Zementart berücksichtigt ist. Durch die ausschließliche Berechnung durch analytische Beziehungen ist die einfache programmtechnische Umsetzbarkeit gewährleistet. Die Anwendung des Vorhersageverfahrens

nach Bazant erfordert die Kenntnis der genauen Betonzusammensetzung, die aber nur in Ausnahmefällen (z.B. Versuchsnachrechnungen) bekannt ist.

Da in den einzelnen Vorhersageverfahren unterschiedliche Eingangsparameter zu berücksichtigen sind, wirkt sich die Variation bestimmter Parameter nur auf einen Teil der Schwindvorhersagen aus. Die in Abbildung 2.3-1 ersichtlichen Unterschiede in den Kurvenverläufen sind damit nur für die angegebenen Bedingungen gültig.

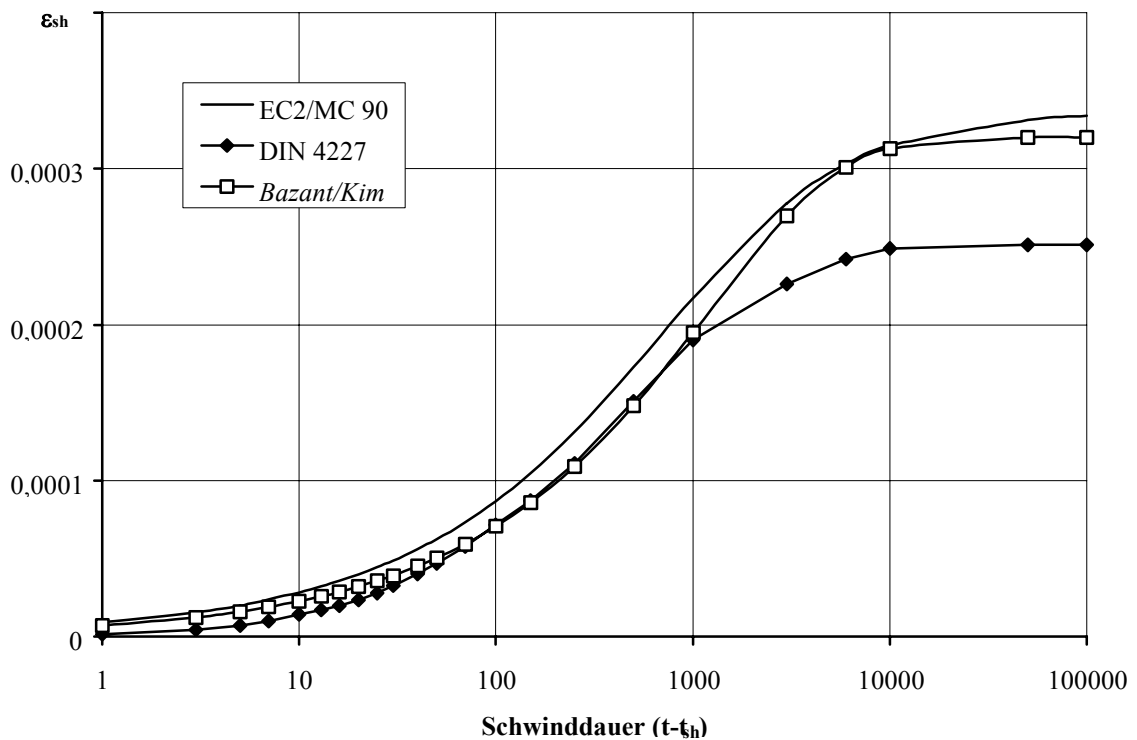


Abb. 2.3-1: verschiedene Vorschläge zur Beschreibung des Betonschwindens (RH = 80%, T = 20°C, $2A_c/U = 200$ mm)

Die Wirklichkeitsnähe der Schwindfunktionen ist im Einzelfall von vornherein nicht angebar. Dagegen ist es nach Auswertung einer bestimmten Anzahl von Versuchen möglich, einen mittleren Variationskoeffizienten der Schwindvorhersage zu bestimmen und somit eine Aussage über die mittlere Vorhersagegenauigkeit zu erhalten. So wird der mittlere Variationskoeffizient im EC 2 für die dort verwendete Beziehung mit 35% angegeben. Für das Verfahren nach DIN 4227 wurde sogar ein mittlerer Variationskoeffizient von 45% ermittelt. *Bazant* [2.16] gibt für das von ihm entwickelte Verfahren einen mittleren Variationskoeffizienten von 27% an, wobei eine direkte Vergleichbarkeit nicht gegeben ist, da ein anderes Versuchskollektiv als Vergleichsbasis vorlag.

2.4 Kriechen

2.4.1 Definitionen und grundlegende Zusammenhänge

Das Verformungsverhalten des Betons unter Dauerlast kann in Abhängigkeit der aufgetragenen Lastintensität in die Bereiche lineares Kriechen und nichtlineares Kriechen unterteilt werden.

Im Bereich des linearen Kriechens wird näherungsweise von einem proportionalen Zusammenhang zwischen Kriechverformung und kriechezeugender Spannung ausgegangen. Die Gültigkeit der linearen Kriechtheorie ist auf den Gebrauchslastbereich beschränkt, in dem der maximale Wert der Betonspannungen bei 25%..40% der Druckfestigkeit liegt. Oberhalb dieses Bereiches wachsen die Kriechverformungen bei steigender kriechezeugender Spannung durch das fortschreitende Mikrorißwachstum unter Dauerlastbeanspruchung überproportional an. Das überproportionale Anwachsen der Kriechverformungen wird als nichtlineares Kriechen des Betons bezeichnet.

Die Kriechverformung $\varepsilon_{c,cr}(t, \tau)$ zum Zeitpunkt t infolge einer zum Zeitpunkt τ aufgetragenen Spannung kann unter der Voraussetzung der Gültigkeit der linearen Kriechtheorie mit Hilfe der Kriechzahl $\varphi_c(t, \tau)$ als Vielfaches der elastischen Verformung $\varepsilon_{c,el}(\tau)$ ausgedrückt werden, wobei die Kriechzahl vom Betrachtungszeitpunkt t und vom Betonalter bei Belastung τ abhängig ist.

$$\varepsilon_{c,cr}(t, \tau) = \varphi_c(t, \tau) \cdot \varepsilon_{c,el}(\tau) \quad (2.4.1-1)$$

Als Bezugsverformung $\varepsilon_{c,el}(\tau)$ für die Kriechzahl kann entweder die dem 28-Tage Elastizitätsmodul zugeordnete elastische Dehnung oder die sich bei Belastungsbeginn τ einstellende elastische Dehnung gewählt werden. Im weiteren wird, analog zur Vorgehensweise in den Normen DIN 4227 [2.15] und EC2 [2.13], die elastische Verformung im Betonalter von 28 Tagen als Bezugsgröße für die Kriechzahl verwendet.

$$\varepsilon_{c,el}(\tau) = \frac{\sigma_c(\tau)}{E_{c,28}} \quad (2.4.1-2)$$

Nach Einsetzen von Gl.(2.4.1-2) in Gl.(2.4.1-1) ergibt sich die Beziehung für die Kriechverformung in Abhängigkeit einer zum Zeitpunkt τ aufgetragenen konstanten Spannung in Abhängigkeit des 28-Tage Elastizitätsmoduls.

$$\varepsilon_{c,cr}(t, \tau) = \varphi_{c,28}(t, \tau) \frac{\sigma_c(\tau)}{E_{c,28}} \quad (2.4.1-3)$$

Durch Summation der Kriechverformung und der elastischen Verformung erhält man die lastabhängige Gesamtverformung zum Zeitpunkt t infolge Belastung zum Zeitpunkt τ .

$$\varepsilon_c(t, \tau) = \varepsilon_{c,el}(\tau) + \varepsilon_{c,cr}(t, \tau) = \sigma_c(\tau) \left[\frac{1}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi_c(t, \tau)}{E_{c,28}} \right], \quad (2.4.1-4)$$

wobei durch Einführung des Kriechmaßes $C_c(t, \tau)$ bzw. der Kriechfunktion $J_c(t, \tau)$ folgende verkürzte Schreibweise möglich ist.

$$\varepsilon_c(t, \tau) = \sigma_c(\tau) \left[\frac{1}{E_c(\tau)} + C_c(t, \tau) \right] = \sigma_c(\tau) J_c(t, \tau) \quad (2.4.1-5)$$

Die Kriechfunktion $J_c(t, \tau)$ stellt demzufolge die Verformung infolge einer zum Zeitpunkt τ aufgetragenen Einheitsspannung $\sigma_c(\tau)=1$ dar und kann als zeitabhängige Einheitsverformung aufgefaßt werden.

Der Sonderfall des last- und zeitabhängigen Betonverhaltens, daß bei konstant bleibender Verformung die Spannung abfällt, wird als Relaxation bezeichnet. Der Spannungsabfall infolge Relaxation kann durch die Relaxationszahl $\psi_c(t, \tau)$ erfaßt werden, die als Verhältniswert von Spannungsänderung zur ursprünglich vorhandenen Spannung definiert ist.

$$\Delta \sigma_c(t, \tau) = \psi_c(t, \tau) \sigma_c(\tau) \quad (2.4.1-6)$$

Zwischen der Kriechzahl und der Relaxationszahl besteht der Zusammenhang

$$\psi_c(t, \tau) = \frac{\varphi_c(t, \tau)}{1 + \rho \cdot \varphi_c(t, \tau)}, \quad (2.4.1-7)$$

worin ρ den Relaxationskennwert darstellt. Mit dem Relaxationswert wird der Einfluß der Alterung des Betons auf das Betonkriechen berücksichtigt. Dieser wurde erstmals von *Trost* [2.17] eingeführt. Auf die Ermittlung des Relaxationskennwertes wird in dem nachfolgenden Kapitel eingegangen.

Für den Fall des nichtlinearen Kriechens ist die Kriechzahl φ_c zusätzlich von der Spannung im Beton abhängig, so daß in den Gln.(2.4.1-1..7) die Variablen $\varphi_c(t, \tau)$, $C_c(t, \tau)$, $J_c(t, \tau)$ und $\psi_c(t, \tau)$ durch $\varphi_c(\sigma_c, t, \tau)$, $C_c(\sigma_c, t, \tau)$, $J_c(\sigma_c, t, \tau)$ und $\psi_c(\sigma_c, t, \tau)$ ersetzt werden müssen.

2.4.2 Langzeitverhalten unter veränderlicher Spannungs- und Dehnungsgeschichte

Die beiden Sonderfälle, Kriechen unter konstanter Spannung und Relaxation unter konstanter Dehnung, treten in Stahlbeton-, Spannbeton- bzw. Stahl-Beton-Verbundkonstruktionen praktisch nicht auf, da durch das unterschiedliche Langzeitverhalten der im Verbund zusammenwirkenden Materialien Beton und Stahl zeitabhängige Spannungsumlagerungen hervorgerufen werden. Die Beschreibung des zeitabhängigen Stoffgesetzes unter veränderlicher Spannungs- und Dehnungsgeschichte kann durch Integral- oder durch Differentialgleichungen erfolgen.

Unter der Voraussetzung, daß die Kriechverformung proportional zur kriecherzeugenden Spannung (lineares Kriechen) ist, kann das allgemeine Superpositionsprinzip für linear viskoelastische Werkstoffe nach *Boltzmann* auf den Beton angewendet werden, welches gegenüber dem Superpositionsprinzip für linear elastische Werkstoffe die Erweiterung beinhaltet, daß verschiedene Belastungs- bzw. Verformungszustände unter Berücksichtigung

des Beanspruchungsbeginns und der Beanspruchungsdauer überlagert werden dürfen [2.17]. Bei Betrachtung des Kriechproblems gilt folgende Beziehung für die aus abschnittsweise veränderlicher Belastung resultierende Gesamtdehnung:

$$\varepsilon_c(t_k) = \varepsilon_{c,el}(t_0) [1 + \varphi_c(t_k, t_0)] + \sum_{i=1}^k \Delta \varepsilon_{c,el}(t_i) [1 + \varphi_c(t_k, t_i)] . \quad (2.4.2-1)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (2.4.1-4) und Gl. (2.4.1-5) ergibt sich die Gesamtdehnung als Summe der durch die jeweiligen Spannungssprünge $\Delta \sigma_c(t_i)$ erzeugten Dehnungen, wobei für jeden Spannungssprung eine andere Kriechfunktion $J_c(t, t_i)$ in Abhängigkeit des Zeitpunkts der Lastaufbringung t_i gilt.

$$\varepsilon_c(t_k) = \sigma_c(t_0) J_c(t_k, t_0) + \sum_{i=1}^k \Delta \sigma_c(t_i) J_c(t_k, t_i) \quad (2.4.2-2)$$

Bei stetiger Spannungsänderung werden die Spannungsdifferenzen zu Spannungsdifferentialen, die Summation ist durch eine Integration zu ersetzen.

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) J_c(t, t_0) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} J_c(t, \tau) d\tau \quad (2.4.2-3)$$

Durch partielle Integration erhält man aus Gl. (2.4.2-3) den funktionalen Zusammenhang:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_c(\tau) \frac{\partial J_c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau , \quad (2.4.2-4)$$

der sich auch herleiten läßt, indem der zeitabhängige Spannungsverlauf in vertikale Intervalle (impulsförmige Spannung) aufgeteilt wird und die dadurch entstehenden Dehnungsänderungen superponiert werden. Beide Formulierungen sind als gleichwertig anzusehen.

Für den Fall der Relaxation unter vorgegebener abschnittsweise veränderlicher Dehnungsgeschichte kann unter Verwendung der Relaxationszahl $\psi_c(t, t_i)$ analog zu Gl. (2.4.2-1) folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\sigma_c(t_k) = \varepsilon_{c,el}(t_0) E_c(t_0) [1 - \psi_c(t_k, t_0)] + \sum_{i=1}^k \Delta \varepsilon_{c,el}(t_i) E_c(t_i) [1 - \psi_c(t_k, t_i)] , \quad (2.4.2-5)$$

die bei einer stetigen Dehnungsänderung entsprechend Gl. (2.4.2-3) in die Integralform gebracht werden kann. Nach partieller Integration erhält man die Form für vertikale Dehnungsintervalle:

$$\sigma_c(t) = \varepsilon_c(t) E_c(t) - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \varepsilon_c(\tau) \frac{\partial R_c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau , \quad (2.4.2-6)$$

wobei $R_c(t, \tau)$ die Relaxationsfunktion für den Beton darstellt, die durch die Beziehung

$$R_c(t, \tau) = E_c(\tau) [1 - \psi_c(t, \tau)] \quad (2.4.2-7)$$

definiert ist. Die Relaxationszahl $\psi_c(t, \tau)$ kann mit Gl. (2.4.1-7) bestimmt werden. Der Zusammenhang zwischen der Kriechfunktion $J_c(t, \tau)$ und der Relaxationsfunktion $R_c(t, \tau)$ wird durch eine Integralgleichung beschrieben, für die keine geschlossene Lösung existiert. Bazant [2.18] gibt eine Näherung in Form der Beziehung

$$R_c(t, \tau) = \frac{1 - \Delta_0}{J_c(t, \tau)} - \frac{0.115}{J_c(t, t-1)} \left[\frac{J_c(t - \Delta, \tau)}{J_c(t, \tau + \Delta)} - 1 \right] \quad (2.4.2-8)$$

an, wobei $\Delta_0 \approx 0.008$ und $\Delta = (t - \tau)/2$ ist.

Den Ausdruck für die Dehngeschwindigkeit erhält man unter Berücksichtigung des *Satzes von Leibniz-Newton* durch Differentiation von Gl. (2.4.2-4) nach t .

$$\dot{\varepsilon}_c(t) = \frac{\dot{\sigma}_c(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_c(\tau) \frac{\partial \dot{J}_c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.4.2-9)$$

Dabei ist $\dot{J}_c(t, \tau)$ die erste Ableitung der Kriechfunktion $J_c(t, \tau)$ nach t , die im linearen Fall der ersten Ableitung des Kriechmaßes $\dot{C}_c(t, \tau)$ entspricht. In gleicher Weise entsteht der Ausdruck für die Belastungsgeschwindigkeit:

$$\dot{\sigma}_c(t) = \dot{\varepsilon}_{c,el}(t) E_c(t) - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \varepsilon_{c,el}(\tau) \frac{\partial \dot{R}_c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.4.2-10)$$

Je nachdem, wie die Zeitabhängigkeit der Funktionen $J_c(t, \tau)$ bzw. $R_c(t, \tau)$ definiert ist, existieren verschiedene Kriechtheorien, die das reale Langzeitverhalten des Betons mehr oder weniger gut widerspiegeln.

1. Theorie des elastisch kriechenden Körpers

Es wird davon ausgegangen, daß die Kriechzahl und damit die Kriechfunktion vom Zeitpunkt des Belastungsbeginns τ und vom Betrachtungszeitpunkt t abhängt. Diese Annahme wurde anhand von Versuchsergebnissen bestätigt. Ungenauigkeiten resultieren aus der Annahme des Vorhandenseins „jungfräulichen“, d.h. vorher unbelasteten Betons zu jedem Zeitpunkt einer Laständerung, obwohl die Größe der Kriechverformungen durch Vorbelastungen beeinflusst wird [2.19].

Für die Integralausdrücke in den Gln. (2.4.2-4,6,9,10) existiert allerdings keine geschlossene Lösung, da der Verlauf der Spannungsfunktion $\sigma(\tau)$ von vornherein nicht bekannt ist. Die Anwendung der Theorie des elastisch kriechenden Körpers erfordert somit eine numerische Auswertung der entsprechenden Integralausdrücke.

Ein alternatives Berechnungsverfahren wird von *Trost* [2.17] angegeben. Mit der vereinfachenden Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls kann Gl.(2.4.2-3) in die Form

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c} [1 + \varphi_c(t, t_0)] + \frac{1}{E_c} [\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)] + \frac{1}{E_c} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \varphi_c(t, \tau) d\tau \quad (2.4.2-11)$$

überführt werden. Durch die Einführung des Relaxationskoeffizienten $\rho(t, t_0)$, der durch die Integralgleichung

$$\rho(t, t_0) = \frac{1}{[\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)] \varphi_c(t, t_0)} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \varphi_c(t, \tau) d\tau \quad (2.4.2-12)$$

definiert ist, kann Gl. (2.4.2-11) durch eine algebraische Spannungs-Dehnungs-Zeit-Beziehung ersetzt werden:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c} [1 + \varphi_c(t, t_0)] + \frac{1}{E_c} [\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)] \cdot [1 + \rho(t, t_0) \varphi_c(t, t_0)]. \quad (2.4.2-13)$$

Durch den Relaxationskennwert wird der Einfluß der Alterung auf die Kriechzahl zum Zeitpunkt t bei Belastungsänderungen zum Zeitpunkt $\tau > t_0$ erfaßt. Aus Gl. (2.4.2-12) geht hervor, daß die numerische Behandlung des Problems auf die Ermittlung des Relaxationskennwertes verlagert wird.

Die Ermittlung des Relaxationskennwerts war in den vergangenen Jahren Gegenstand einer Vielzahl wissenschaftlicher Veröffentlichungen. Mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen läßt sich zeigen, daß der Relaxationskennwert zwischen 0.5 und 1.0 liegen muß [2.17, 2.20].

Blessenohl kommt in [2.21] nach umfangreichen Berechnungen mit verschiedenen inkrementellen Methoden zu dem Ergebnis, daß der Relaxationskennwert für baupraktisch relevante Fälle zwischen 0.7 und 0.95 liegt und bestätigt damit den Vorschlag von *Trost*, den Relaxationskennwert näherungsweise konstant mit 0.8 anzusetzen.

2. Theorie des Alterns

Bei der Alterungstheorie wird davon ausgegangen, daß die Kriechzahl nur vom Betonalter und nicht vom Alter bei Belastungsbeginn abhängt. Die bei Belastungsänderung anzusetzenden Kriechkurven lassen sich durch vertikales Parallelverschieben aus der Ausgangskriechkurve gewinnen. Für die Kriechzahl gilt folglich die Beziehung:

$$\varphi_c(t, \tau) = \varphi_c(t) - \varphi_c(\tau). \quad (2.4.2-14)$$

Diese Annahme steht im Widerspruch mit der Definition des allgemeinen Superpositionsprinzips für linear viskoelastische Körper [2.22] und führt zu folgenden Fehleinschätzungen:

- Die Kriechverformungen nehmen mit steigendem Belastungsalter sehr schnell ab; bei sehr hohem Belastungsalter werden sie zu Null.
- Die Rückverformung bei Entlastung wird unterschätzt.
- Es findet keine Kriecherholung statt.

Die Anwendung dieser Theorie ist deshalb auf solche Fälle beschränkt, bei denen die kriechezeugenden Spannungen nahezu konstant sind und zu einem frühen Zeitpunkt aufgebracht wurden.

Auf Grundlage der Alterungstheorie und mit der weiteren einschränkenden Annahme, daß der Elastizitätsmodul $E_c(t)$ über den Betrachtungszeitraum konstant ist, läßt sich aus Gl. (2.4.2-9) die bekannte Differentialgleichung nach *Dischinger* herleiten:

$$\frac{d\varepsilon_c(t)}{dt} = \frac{\sigma_c(t)}{E_c} \frac{d\varphi_c}{dt} + \frac{1}{E_c} \frac{d\sigma_c(t)}{dt} \quad (2.4.2-15)$$

Dieses Verfahren, in der englischsprachigen Literatur als *rate of creep method (RC method)* bezeichnet, hat aufgrund des damaligen Wissenstandes und der Lösbarkeit der Differentialgleichung (2.4.2-15) für eine Vielzahl baupraktischer Probleme weite Verbreitung bei der Abschätzung der Auswirkungen des Betonkriechens gefunden.

3. Theorie der elastischen Nachwirkung

Die Theorie der elastischen Nachwirkung faßt den Beton als nichtalterndes viskoelastisches Material auf, d.h. die Kriechzahl $\varphi_c(t, \tau)$ ist nur von der Dauer des Kriechens und nicht vom Belastungsalter abhängig.

$$\varphi_c(t, \tau) = \varphi_c(t - \tau) \quad (2.4.2-16)$$

Die zu den einzelnen Belastungszeitpunkten gehörenden Kriechkurven sind in horizontaler Richtung parallel verschoben. Daraus folgt, daß alle Kriechkurven für nacheinander aufgebrachte Belastungen demselben Endwert zustreben. Nach Entlastung streben die Restkriechverformungen dem Wert 0 entgegen, d.h. die Kriechverformungen sind vollständig reversibel.

Die Beschreibung des Materialverhaltens entspricht damit der klassischen Theorie der linearen Viskoelastizität, bei der nur echte Werkstoffkonstanten auftreten, die von der Zeit unabhängig sind. Daraus folgt, daß der Elastizitätsmodul des Betons über den Zeitraum als konstant angenommen wird. Für den speziellen Ansatz der Kriechzahl

$$\varphi_c(t - \tau) = k_0 \varphi_{c,N} \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_R}\right) \right] \quad (2.4.2-17)$$

ergibt sich aus Gl. (2.4.2-3) die Differentialgleichung für die Theorie der elastischen Nachwirkung [2.23]:

$$\frac{d\varepsilon_c(t)}{dt} + \frac{\varepsilon_c(t)}{\tau_R} = \frac{1}{E_c} \frac{d\sigma_c(t)}{dt} + \frac{\sigma_c(t)}{E_c} \frac{1 + k_0 \varphi_{c,N}}{\tau_R} \quad (2.4.2-18)$$

Dabei wird durch τ_R die sogenannte Retardationszeit bezeichnet, die den Verhältniswert von Viskositätsmodul η_v des Dämpfers und dem Elastizitätsmodul E_c der Feder einer Kelvineinheit darstellt.

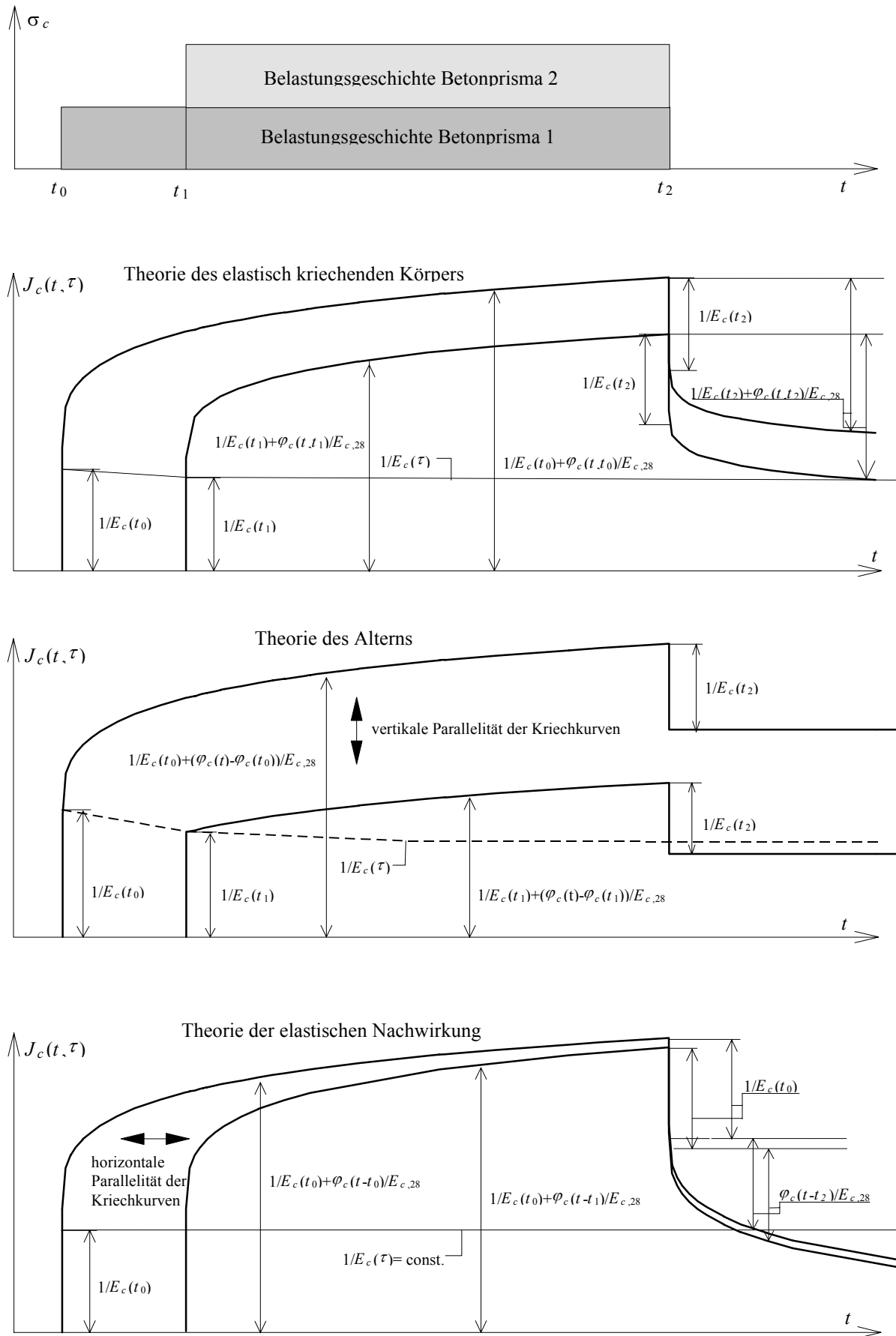


Abb. 2.4.2-1: Gegenüberstellung von Kriechtheorien

4. Weitere Verfahren

Aus der Annahme einer additiven Verknüpfung von elastischer Dehnung, verzögert elastischer Dehnung und Fließdehnung lassen sich weitere Verfahren ableiten, die sich der Theorie des elastisch kriechenden Körpers zuordnen lassen.

Bei diesen Verfahren, in der englischsprachigen Literatur als *rate of flow method* bezeichnet, ist der Anteil der verzögert elastischen Dehnung analog zur Theorie der elastischen Nachwirkung unabhängig vom Betonalter bei Belastung, während der Fließanteil der Theorie des Alterns folgt. Die Kriechfunktion $J_c(t, \tau)$ kann somit durch die Beziehung

$$J_c(t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} + C_{c,v}(t - \tau) + C_{c,f}(t) - C_{c,f}(\tau) \quad (2.4.2-19)$$

bzw.

$$J_c(t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi_{c,v}(t - \tau)}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi_{c,f}(t) - \varphi_{c,f}(\tau)}{E_c(\tau)}. \quad (2.4.2-20)$$

beschrieben werden. Durch Einsetzen von Gl. (2.4.2-20) in Gl. (2.4.2-3) ergibt sich der Zusammenhang für die Gesamtdehnung in der Form:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \left[1 + \varphi_{c,v}(t - t_0) + \varphi_{c,f}(t) \right] + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi_{c,v}(t - \tau)}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi_{c,f}(t) - \varphi_{c,f}(\tau)}{E_c(\tau)} \right] d\tau, \quad (2.4.2-21)$$

wobei der Integralausdruck analog zur Theorie des elastisch kriechenden Körpers nur durch ein numerisches Verfahren angenähert werden kann. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die verzögert elastische Verformung im Vergleich zur Fließverformung ihren Endwert nach wesentlich kürzerer Belastungsdauer erreicht, macht *Nielsen* in [2.24] den Vorschlag, die verzögert elastische Verformung vereinfachend wie eine sofort eintretende elastische Verformung zu behandeln. Mit dieser Annahme wird $\varphi_{c,v}$ zeitunabhängig und kann vor den Integralausdruck gezogen werden, der damit analog zur *Theorie des Alterns* aufgebaut ist. Nach Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls und Ableitung von Gl. (2.4.2-21) nach t erhält man die Differentialgleichung nach *Dischinger* in verbesserter Form (*Improved Dischinger method*):

$$\frac{d\varepsilon_c(t)}{dt} = \frac{\sigma_c(t)}{E_c} \frac{d\varphi_{c,f}}{dt} + \frac{1 + \varphi_{c,v}(t)}{E_c} \frac{d\sigma_c(t)}{dt}. \quad (2.4.2-22)$$

Die vereinfachenden Annahmen verursachen dabei lediglich in der Anfangsphase eine fehlerhafte Abschätzung der Kriechverformungen, danach werden befriedigende Ergebnisse erzielt.

Mit der *solidification theory* entwickelt *Bazant* [2.25,26,27,28] ein Verfahren, dessen grundlegende Zusammenhänge aus mikrostrukturellen Betrachtungen heraus abgeleitet werden. In Anlehnung an die *rate of flow method* setzt sich die zeitabhängige

Gesamtverformung summarisch aus den Anteilen elastische, verzögert elastische und Fließverformung zusammen, wobei sowohl die verzögert elastische Verformung als auch die Fließverformung als alterungsabhängig angenommen werden. Die Kriechfunktion lautet:

$$J_c(t, \tau) = \frac{1}{E_{c,0}} + C_{c,v}(t, \tau) + C_{c,f}(t, \tau), \quad (2.4.2-23)$$

wobei $E_{c,0}$ den asymptotischen E-Modul darstellt, durch den die Verformung infolge extrem kurzzeitig wirkender Belastung (unter $1\mu s$) erfaßt wird. Die Funktionen $C_{c,v}$ bzw. $C_{c,f}$ können durch das Integral über die Geschwindigkeit der verzögert elastischen Verformung bzw. Fließverformung ersetzt werden.

$$J_c(t, \tau) = \frac{1}{E_{c,0}} + \int_{t'=\tau}^{t'=t} \dot{C}_{c,v}(t', \tau) dt' + \int_{t'=\tau}^{t'=t} \dot{C}_{c,f}(t', \tau) dt' \quad (2.4.2-24)$$

Durch die Variable t' werden beliebige Zeitpunkte innerhalb des Belastungszeitraums $t - \tau$ beschrieben. Die Theorie beruht auf dem Grundgedanken, den Alterungseffekt über den zeitabhängigen Volumenzuwachs des Anteils der Zementmatrix zu beschreiben, der ausreichend hydratisiert ist, um sich vollständig an der Lastabtragung zu beteiligen. Das zeitabhängige Materialverhalten dieses Anteils kann, analog zur klassischen Viskoelastizitätstheorie, als alterungsunabhängig angenommen werden. Die Beziehung für die differentielle Formulierung des Kriechmaßes wird von *Bazant* mit

$$\dot{C}_c(t, \tau) = \dot{C}_{c,v}(t, \tau) + \dot{C}_{c,f}(t, \tau) = \frac{\dot{\Phi}_{c,v}(t - \tau)}{v_c(t)} + \frac{\dot{\Phi}_{c,f}(t - \tau)}{h_c(t)} \quad (2.4.2-25)$$

angegeben. Mit $\Phi_{c,v}(t, \tau)$ und $\Phi_{c,f}(t, \tau)$ werden die sogenannten Nachgiebigkeitsfunktionen in der Mikrostruktur des erhärteten Volumenanteils bezeichnet. Der Einfluß der Alterung wird durch die Funktionen $v_c(t)$ und $h_c(t)$ beschrieben, die aus physikalischer Sicht als effektive lastaufnehmende Volumenanteile des hydratisierten Zements aufgefaßt werden können, wobei $v_c(t)$ der verzögert elastischen Verformung und $h_c(t)$ der Fließverformung zugeordnet ist. Durch Einsetzen von (2.4.2-25) in (2.4.2-24) erhält man $J_c(t, \tau)$ in der Form:

$$J_c(t, \tau) = \frac{1}{E_{c,0}} + \int_{t'=\tau}^{t'=t} \frac{\dot{\Phi}_{c,v}(t' - \tau)}{v_c(t')} dt' + \int_{t'=\tau}^{t'=t} \frac{\dot{\Phi}_{c,f}(t' - \tau)}{h_c(t')} dt', \quad (2.4.2-26)$$

aus der sich durch Ableitung nach t die differentielle Beziehung für die Kriechfunktion ergibt.

$$\dot{J}_c(t, \tau) = \frac{\dot{\Phi}_{c,v}(t - \tau)}{v_c(t)} + \frac{\dot{\Phi}_{c,f}(t - \tau)}{h_c(t)} \quad (2.4.2-27)$$

Aus Gl. (2.4.2-9) entsteht in Verbindung mit Gl. (2.4.2-27) die Gleichung für die zeitabhängige Dehngeschwindigkeit:

$$\dot{\varepsilon}_c(t) = \frac{\dot{\sigma}_c(t)}{E_{c,0}} + \sigma_c(t_0) \left[\frac{\dot{\Phi}_{c,v}(t-t_0)}{v_c(t)} + \frac{\dot{\Phi}_{c,f}(t-t_0)}{h_c(t)} \right] + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{\partial \sigma_c(\tau)}{\partial \tau} \left[\frac{\dot{\Phi}_{c,v}(t-\tau)}{v_c(t)} + \frac{\dot{\Phi}_{c,f}(t-\tau)}{h_c(t)} \right] d\tau, \quad (2.4.2-28)$$

aus der durch partielle Integration die Beziehung für die Formulierung auf Grundlage der Überlagerung impulsförmiger Spannungen entsteht.

$$\dot{\varepsilon}_c(t) = \frac{\dot{\sigma}_c(t)}{E_{c,0}} - \frac{1}{v_c(t)} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_c(\tau) \frac{\partial \dot{\Phi}_{c,v}(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau - \frac{1}{h_c(t)} \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_c(\tau) \frac{\partial \dot{\Phi}_{c,f}(t-\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.4.2-29)$$

Unter Berücksichtigung von Gl.(2.4.2-27) erhält man die differentielle Formulierung des Materialgesetzes des Betons in der Form von Gl.(2.4.2-9).

2.4.3 Nichtlinearität des Kriechens unter hohen Spannungen

Die in den zwei vorangegangenen Kapiteln angegebenen Beziehungen liefern nur im Gebrauchslastbereich befriedigende Ergebnisse, da sie unter der Voraussetzung eines proportionalen Zusammenhangs zwischen kriecherzeugender Spannung und Kriechdehnung abgeleitet wurden. Wie in Kapitel 2.4.1 bereits erwähnt, wird diese Annahme verletzt, wenn die Spannungen oberhalb des Gebrauchslastbereiches liegen, da die zunehmende Mikrorißbildung unter anwachsender Belastung eine Beschleunigung des Kriechens bewirkt. Die Nichtberücksichtigung dieser Nichtlinearität kann in Abhängigkeit vom Spannungsniveau zu einer deutlichen Unterschätzung der zeitabhängigen Verformungen und der Spannungs- bzw. Schnittgrößenumlagerungen führen.

Die mathematische Erfassung des nichtlinearen Kriechens ist seit einigen Jahren Gegenstand zahlreicher Veröffentlichungen. Dabei werden, ausgehend von Versuchsbeobachtungen, verschiedene Wege zur Berücksichtigung der Nichtlinearität des Kriechens unter hohen Spannungen beschritten.

1. Entwicklung nichtlinearer Feder - Dämpfer - Modelle, mit deren Hilfe Differentialgleichungen zur Beschreibung des nichtlinearen Kriechens aufgestellt werden [2.29, 2.30, 2.31]
2. Annahme der Proportionalität der Kriechverformungen zu den Kurzzeitverformungen unter Einschluß inelastischer Verformungsanteile, d.h. Verzerrung der nichtlinearen Kurzzeit-Spannungsdehnungslinie des Betons mit Hilfe einer linearen Kriechzahl [2.7, 2.32]
3. Aufspaltung der Kriechfunktion in einen linearen (spannungsunabhängigen) und einen nichtlinearen (spannungsabhängigen) Anteil [2.33, 2.4]
4. Erhöhung der linearen Kriechzahl mit einem vom Spannungsniveau abhängigen, empirisch gefundenen Überproportionalitätsfaktor [2.8, 2.9, 2.10, 2.13, 2.25, 2.26, 2.34, 2.35]

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das nichtlineare Kriechen durch die unter Punkt 4 beschriebene Erhöhung der linearen Kriechzahl durch einen Überproportionalitätsfaktor berücksichtigt.

Nachfolgend werden ausgewählte Verfahren vorgestellt, die sich in der Formulierung der empirisch gefundenen, spannungsabhängigen Funktion unterscheiden.

1. Verfahren nach CEB-FIP MC 90 [2.10]/ EC 2 [2.14]

Nach MC 90 / EC 2 kann der Einfluß hoher Spannungen auf die Kriechverformungen im Bereich $0.4f_{cm}(t_0) < |\sigma_c| \leq 0.6f_{cm}(t_0)$ durch eine Korrektur der Grundkriechzahl $\varphi_{c,0}$ mit Hilfe der Beziehung

$$\varphi_{c,0,k} = \varphi_{c,0} F[\sigma_c] \quad (2.4.3-1)$$

berücksichtigt werden. Der Überproportionalitätsfaktor $F[\sigma_c]$ ergibt sich in Abhängigkeit des Spannungsniveaus $|\sigma_c| / f_{cm}(t_0)$ aus dem funktionalen Zusammenhang:

$$F[\sigma_c] = \exp \left[1.5 \left(\frac{|\sigma_c|}{f_{cm}(t_0)} - 0.4 \right) \right]. \quad (2.4.3-2)$$

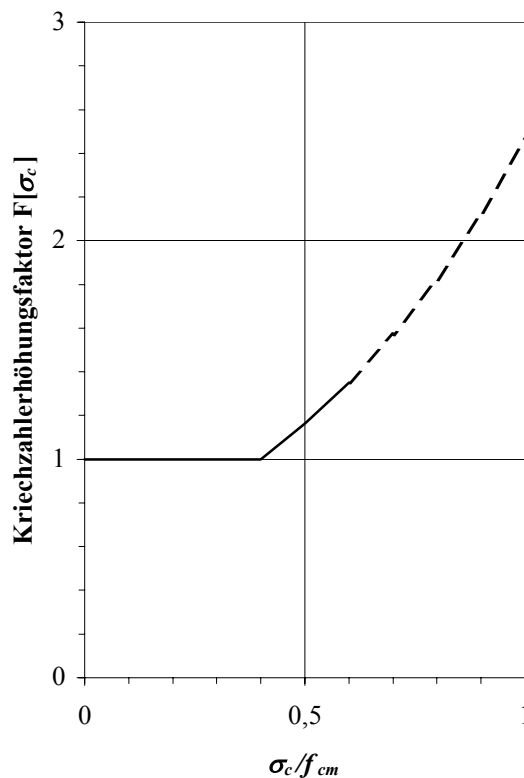


Abb.2.4.3-1: Kriechzahlerhöhungsfaktor nach MC90[2.10]/EC2 [2.14]

Dieses Verfahren geht näherungsweise von einer konstanten Nichtlinearität über den gesamten Belastungszeitraum aus. Die nichtlineare Kriechfunktion lautet:

$$J_c(\sigma_c, t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} + F[\sigma_c] C_c(t, \tau), \quad (2.4.3-3)$$

woraus unter der Voraussetzung, daß die Spannung über den Zeitraum konstant ist, die Beziehung für die Nachgiebigkeitsgeschwindigkeit durch Differentiation nach t entsteht:

$$\dot{J}_c(\sigma_c, t, \tau) = F[\sigma_c] \dot{C}_c(t, \tau). \quad (2.4.3-4)$$

2. Verfahren nach Bazant/Prasannan[2.25,2.26,2.34]

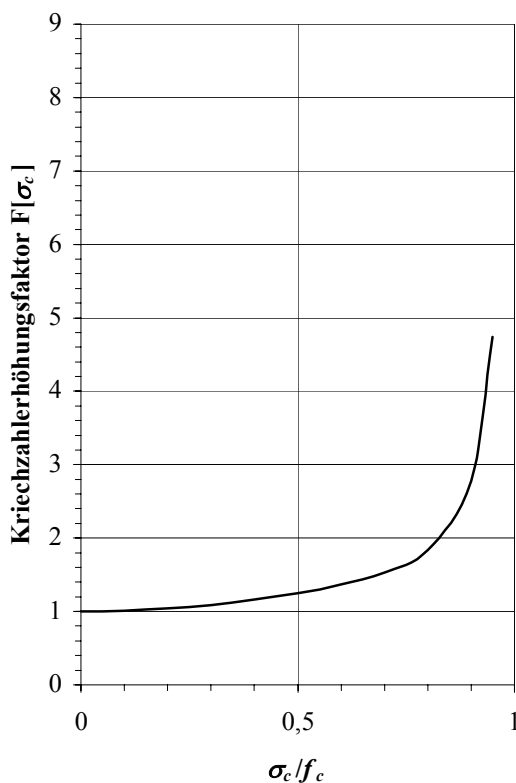
Der Überproportionalitätsfaktor $F[\sigma_c]$ wird in [2.25] durch folgenden empirisch gefundenen Zusammenhang beschrieben:

$$F[\sigma_c] = \frac{1 + s^2}{1 - \Omega}, \quad (2.4.3-5)$$

wobei

$$s = \sigma_c / f_c \quad \text{und} \quad \Omega = s^{10}. \quad (2.4.3-6)$$

Bazant / Prasannan [2.25]; Gl.(2.4.3-6)



Bazant / Kim [2.34]; Gl.(2.4.3-7)

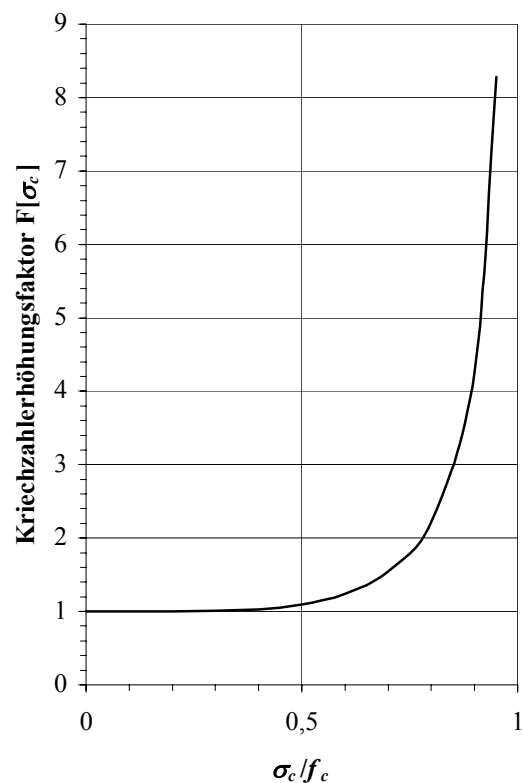


Abb. 2.4.3-2: Kriechzahlerhöhungsfaktoren nach Bazant [2.25] und [2.34]

Mit dem Parameter Ω soll die zunehmende Schädigung der Betonstruktur durch progressive Mikrorißbildung im bruchnahen Bereich erfaßt werden. Aus der Struktur von Gl.(2.4.3-5)

geht hervor, daß der Kriechzahlerhöhungsfaktor nach *Bazant* bei zunehmender Betonspannung dem Wert ∞ zustrebt.

Ein abweichender Zusammenhang für den Überproportionalitätsfaktor wird in [2.34] angegeben:

$$F[\sigma_c] = \frac{1 + 3s^5}{1 - \Omega}, \quad (2.4.3-7)$$

dessen Funktionswerte im bruchnahen Bereich deutlich über den mit Gl. (2.4.3-5) berechneten Funktionswerten liegen. Für die spannungsabhängige Kriechfunktion gibt *Bazant* die Beziehung

$$J_c(\sigma_c, t, \tau) = q_1 + F[\sigma_c] C_c(t, \tau) \quad (2.4.3-8)$$

an. Der Parameter q_1 beschreibt die unmittelbar bei Belastungsbeginn eintretende Verformung und kann aus Versuchsergebnissen bestimmt werden. Für den Fall, daß keine Versuchsergebnisse vorliegen, läßt sich der Parameter q_1 nach Gl. (2.4.4-28) ermitteln. Durch Differentiation von Gl.(2.4.3-8) nach t erhält man die Beziehung für die Kriechgeschwindigkeit analog zu Gl.(2.4.3-4).

3. Verfahren nach Grassler/Kraemer [2.9]

In Auswertung der von *Rüsch et al* durchgeführten und in [2.36] veröffentlichten Dauerstandsversuche leiten *Grassler/Kraemer* [2.9] einen Kriechzahlerhöhungsfaktor ab, der, im Unterschied zu den beiden bisher vorgestellten Verfahren, von der Belastungshöhe *und* der Belastungsdauer abhängig ist.

Als Grenzwert des linearen Kriechens wurde dabei ein Belastungsgrad von 25% ermittelt, so daß sich der Kriechzahlerhöhungsfaktor $F[\sigma_c]$ als Quotient aus der Beziehung:

$$F[\sigma_c] = \frac{\varphi_{c,m}(\sigma_c / f_c, t, \tau)}{\varphi_{c,m}(\sigma_c / f_c = 0.25, t, \tau)} \quad (2.4.3-9)$$

ergibt. Zur Ermittlung des Belastungsgrades ist die vorhandene Betonspannung auf die, für eine Belastungsdauer von 20 min. gültige, Betonfestigkeit zu beziehen. Die mittlere Kriechzahl konnte aus den Versuchsdaten mit Hilfe des definitionsgemäßen Zusammenhangs:

$$\varphi_{c,m}(t, \tau) = \frac{\varepsilon_{c,m}(t, \tau) - \varepsilon_{c,m,el}}{\varepsilon_{c,m,el}}, \quad (2.4.3-10)$$

gewonnen werden, wobei die elastische Dehnung unter Zugrundelegen des Sekantenmoduls für einen Belastungsgrad von 25% bestimmt wurde.

Die Kriechzahlerhöhungsfaktoren wurden in [2.9] in Abhängigkeit der Betonfestigkeitsklasse, des Belastungsalters, der Belastungsdauer und der Belastungshöhe in grafischer Weise ausgewertet. Analytische Beziehungen zur Berechnung der Überproportionalitätsfaktoren sind allerdings nicht angegeben.

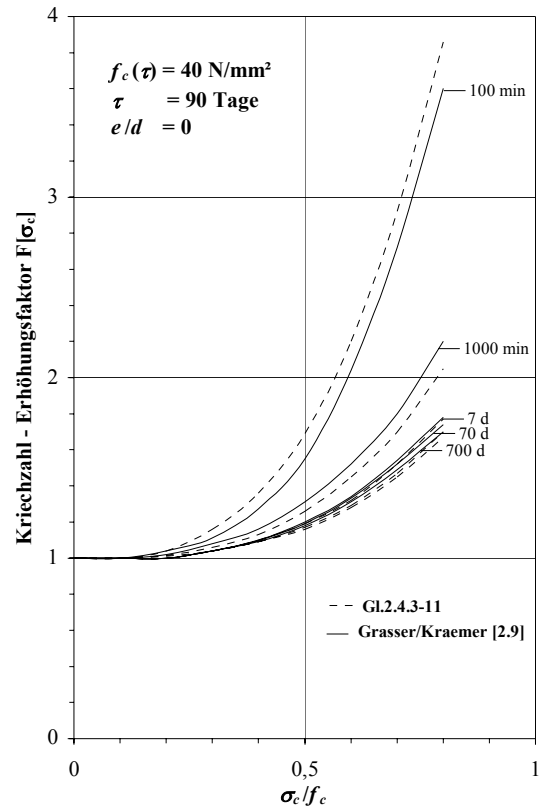
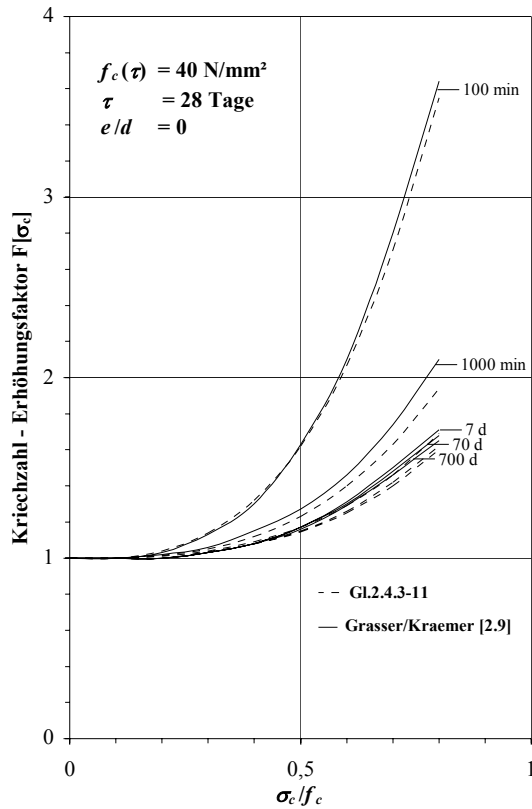
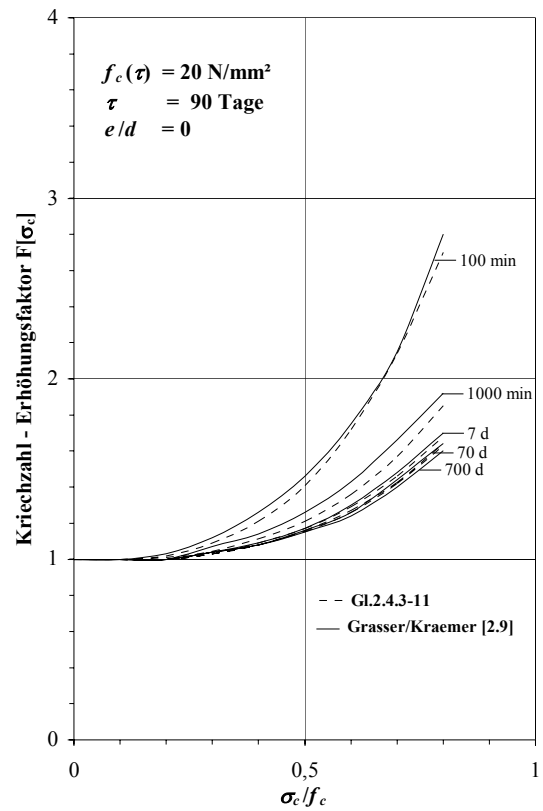
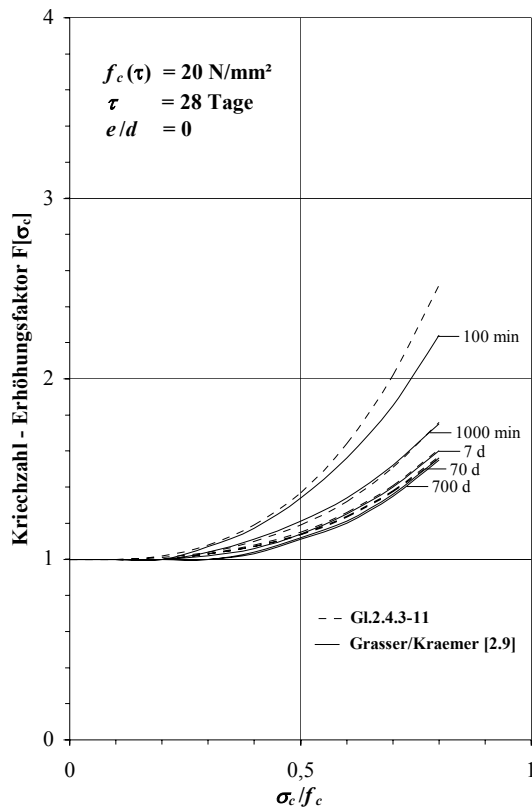


Abb. 2.4.3-3: Gegenüberstellung der Kriechzahlerhöhungsfaktoren nach [2.9] mit den berechneten Werten nach Gl.(2.4.3-11)

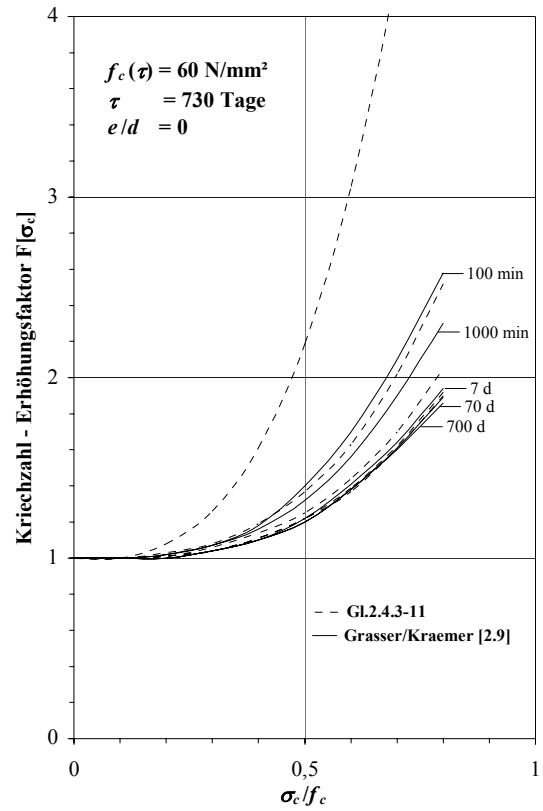
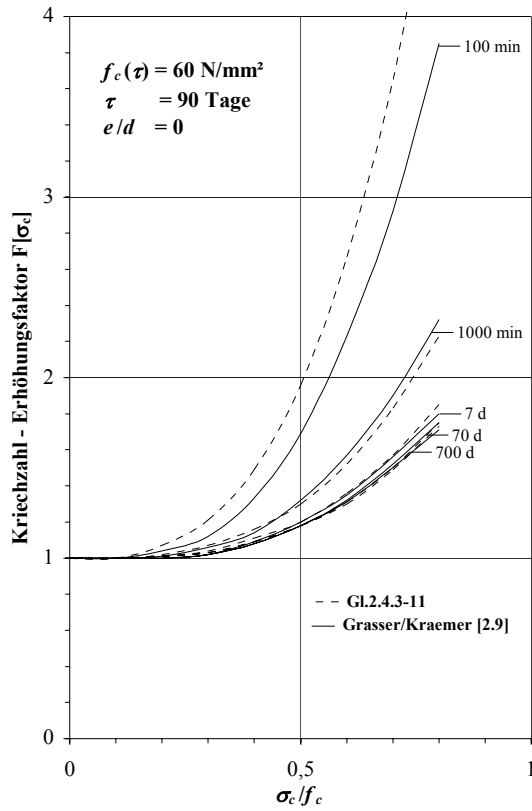
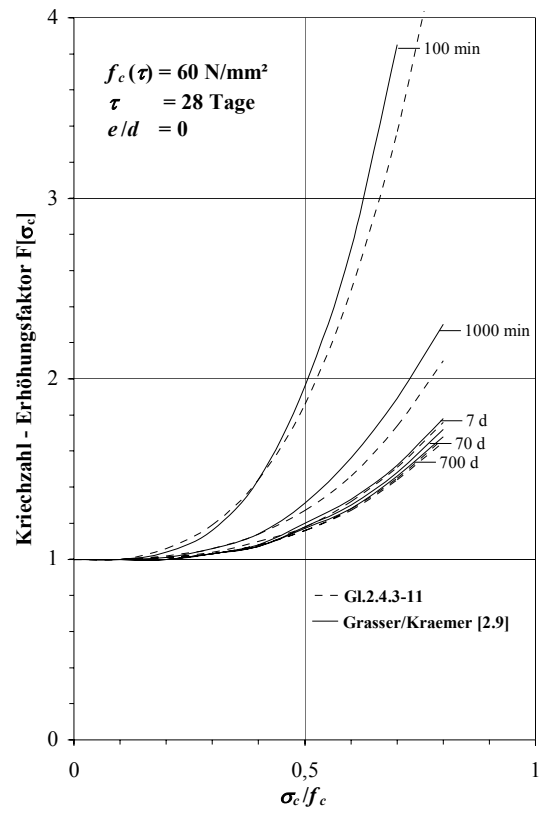
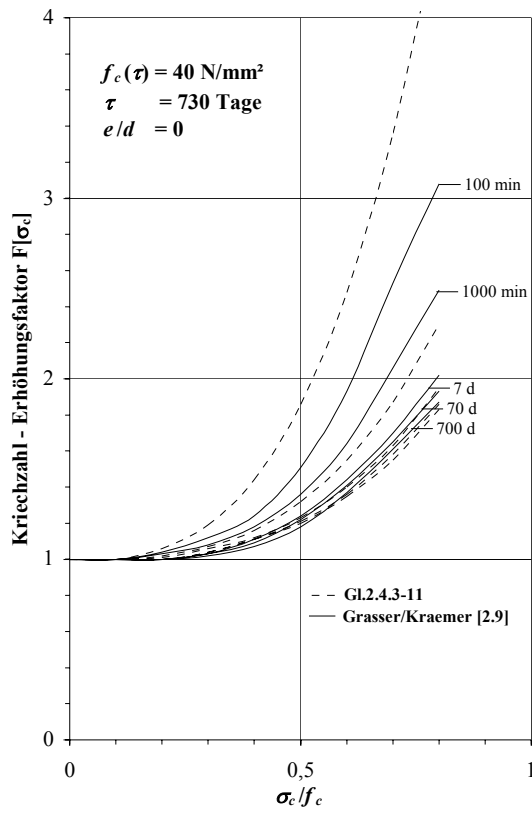


Abb. 2.4.3-3 (Fortsetzung): Gegenüberstellung der Kriechzahlerhöhungsfaktoren nach [2.9] mit den berechneten Werten nach Gl.(2.4.3-11)

Aufgrund des zugrundeliegenden umfangreichen Versuchsmaterials erschien es zweckmäßig, ein nichtlineares Kriechgesetz auf Grundlage der Kriechzahlerhöhungsfaktoren nach *Grasser/Kraemer* [2.9] zur Beschreibung des zeitabhängigen Betonverhaltens zu formulieren. Folgende, auf empirischem Weg abgeleitete, analytische Beziehung wird im Rahmen der Arbeit vorgeschlagen:

$$F[\sigma_c] = 1 + f(t, \tau) s(\sigma_c) \quad \text{mit} \quad f(t, \tau) = \beta_{ft}^{\beta_f} \beta_f \beta_\tau \quad \text{und} \quad s(\sigma_c) = \left(\frac{\sigma_c}{f_c} \right)^3. \quad (2.4.3-11)$$

Die dimensionslosen Beiwerte $\beta_\tau, \beta_f, \beta_{ft}$ und α ergeben sich in Abhängigkeit des Belastungsalters τ in [d], der Belastungsdauer $t - \tau$ in [d] und der Betonfestigkeit f_c in [kN/cm²]:

$$\begin{aligned} \beta_\tau &= \left(\frac{\tau}{28} \right)^{0.1} && \text{Beiwert zur Berücksichtigung des Betonalters bei Belastungsbeginn,} \\ \beta_f &= 0.05 f_c + 1.0 && \text{Beiwert zur Berücksichtigung der Betonfestigkeit,} \\ \beta_{ft} &= 1.2 f_c^{0.1667} && \text{Beiwert zur Berücksichtigung der Betonfestigkeit auf den Einfluß der} \\ &&& \text{Belastungsdauer} \\ \alpha &= \sqrt{t - \tau} && \text{Beiwert zur Berücksichtigung der Belastungsdauer.} \end{aligned}$$

Für die Betonfestigkeit ist dabei die Prismendruckfestigkeit bei einer Belastungsdauer von 20 min. einzusetzen. In der Abb.(2.4.3-3) sind die durch Formel (2.4.3-11) berechneten Werte den Kurven von *Grasser/Kraemer* [2.9] gegenübergestellt.

Unter Berücksichtigung des Kriechzahlerhöhungsfaktors nach Gl.(2.4.3-11) läßt sich folgende nichtlineare Kriechfunktion aufstellen:

$$J_c(\sigma_c, t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} + F[\sigma_c] C_c(t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} + C_c(t, \tau) + s(\sigma_c) C_{c, nl}(t, \tau). \quad (2.4.3-12)$$

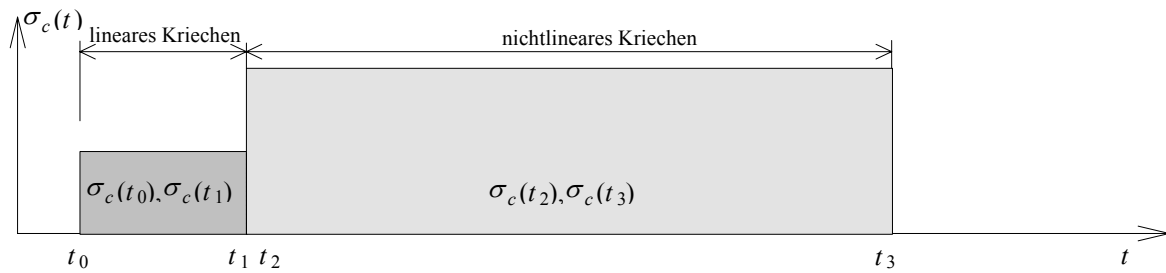
Die gesamte Kriechdeformation wird dabei durch eine Summe aus einem spannungsunabhängigen linearen Anteil und einem spannungsabhängigen nichtlinearen Anteil beschrieben. Der an die Spannungsfunktion gekoppelte Anteil des Kriechmaßes

$$C_{c, nl}(t, \tau) = f(t, \tau) C_c(t, \tau) \quad (2.4.3-13)$$

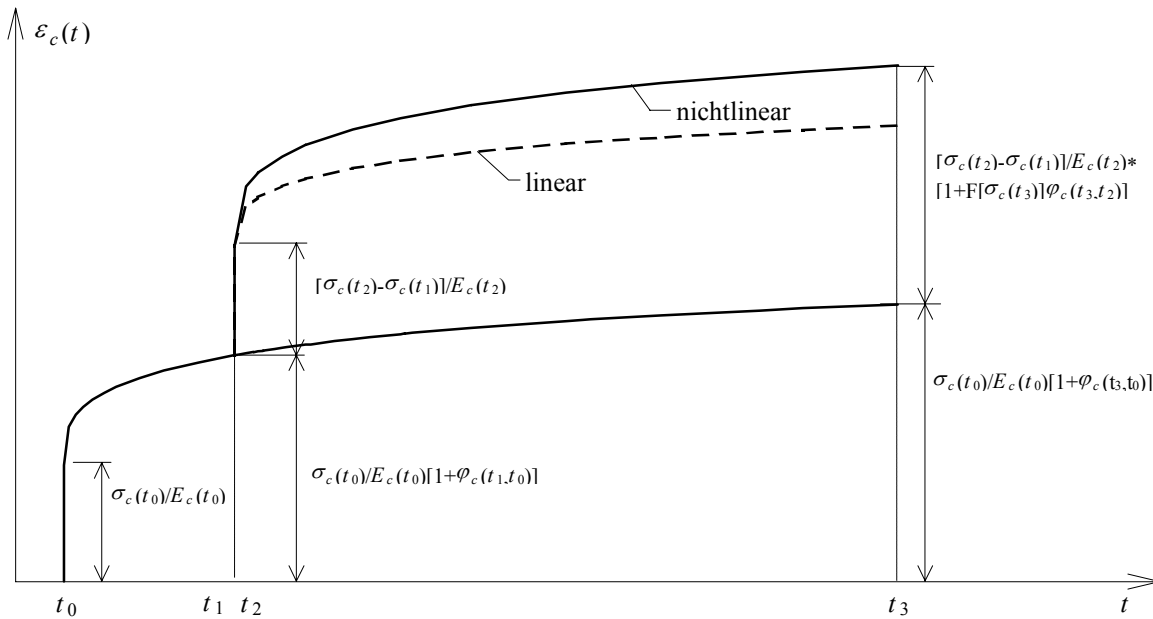
setzt sich aus dem linearen Kriechmaß $C_c(t, \tau)$ und der Funktion $f(t, \tau)$ zusammen, die die Abhängigkeit des nichtlinearen Kriechens von der Belastungsdauer beschreibt.

Die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens bei über den Zeitraum veränderlichen Spannungen erfolgt analog zu *Bazant* [2.25]. Dabei wird der differentielle Zuwachs der linearen Kriechfunktion durch einen Überproportionalitätsfaktor beschleunigt, der von der zum Betrachtungszeitpunkt t vorhandenen Spannung $\sigma_c(t)$ abhängt.

$$\dot{J}_c(\sigma_c(t), t, \tau) = F[\sigma_c(t)] \dot{C}_c(t, \tau) \quad (2.4.3-14)$$



a) integrale Formulierung Gl.(2.4.3-17)



b) differentielle Formulierung Gl.(2.4.3-16)

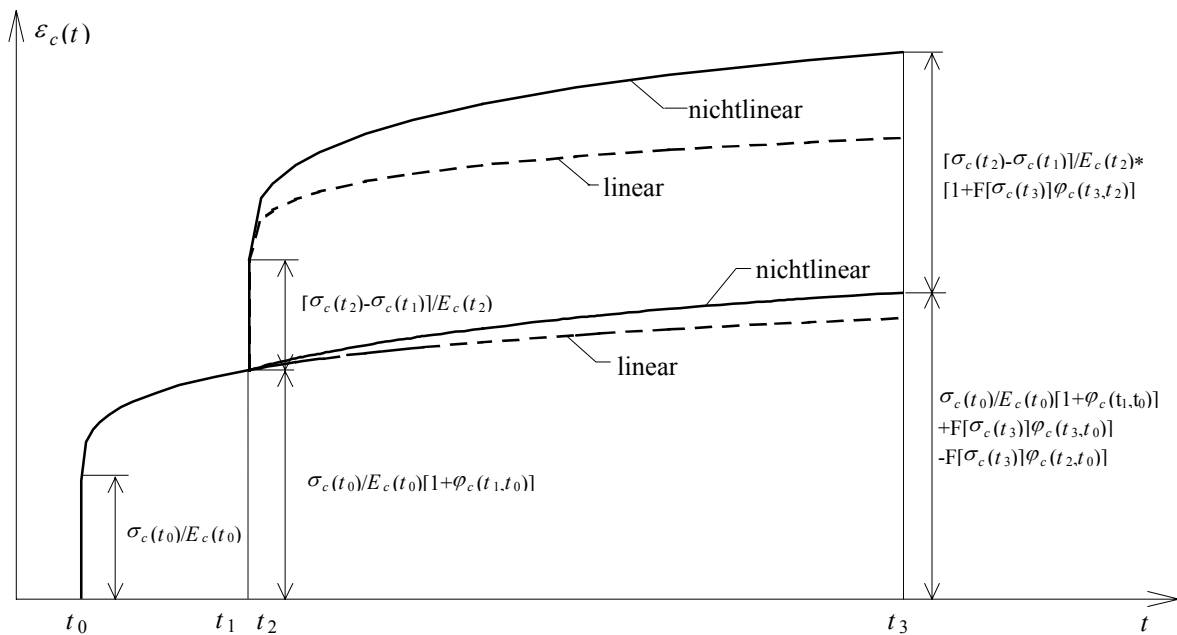


Abb. 2.4.3-4: Behandlung des nichtlinearen Kriechens bei veränderlichen Spannungen bei Verwendung eines a) integralen und b) differentiellen Materialgesetzes

In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, daß sich die Gln.(2.4.3-3,8) nur dann durch Integration von Gl.(2.4.3-14) herleiten lassen, wenn die Spannung im betrachteten Zeitraum konstant bleibt.

Für den Fall, daß der Kriechzahlerhöhungsfaktor zusätzlich von der Belastungsdauer abhängt (Gl.(2.4.3-11)), gilt die Beziehung:

$$\dot{J}_c(\sigma_c(t), t, \tau) = \dot{C}_c(t, \tau) + s[\sigma_c(t)] \dot{C}_{c, nl}(t, \tau), \quad (2.4.3-15)$$

wobei der belastungsdauerabhängige Anteil des Überproportionalitätsfaktors $f(t, \tau)$ nach t differenziert werden muß. Das zeitabhängige Materialgesetz für den Beton bei veränderlicher Spannungsgeschichte lautet in Abhängigkeit der spannungsabhängigen Kriechfunktion:

$$\dot{\varepsilon}_c(t) = \frac{\dot{\sigma}_c(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_c(\tau) \frac{\partial J_c(\sigma_c(\tau), t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.4.3-16)$$

In der Fachliteratur wird zum Teil eine abweichende Beziehung angegeben, die auf der Integralform des zeitabhängigen Materialgesetzes basiert [2.33,37,38]. Die nichtlineare Kriechfunktion ergibt sich dabei in Abhängigkeit der zum Belastungszeitpunkt τ vorhandenen Spannung.

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_c(\tau) \frac{\partial J_c(\sigma_c(\tau), t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.4.3-17)$$

Bei Anwendung dieser Beziehung wird weiterhin die Gültigkeit des Superpositionsgesetzes vorausgesetzt, was unter Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens eine fehlerhafte Annahme darstellt.

In Abb. 2.4.3-4 werden die Unterschiede, die sich aus der Art der Formulierung des zeitabhängigen Materialgesetzes ergeben, anhand eines Beispiels verdeutlicht. Es ist zu erkennen, daß die Nichtlinearität des Betonkriechens unter hoher Spannung nur durch die differentielle Formulierung des Materialgesetzes Gl.(2.4.3-16) zutreffend erfaßt wird.

Die mit Gl.(2.4.3-17) berechneten Werte unterschätzen die Kriechdeformationen bei steigender Spannung und überschätzen die Kriechdeformationen bei abfallender Spannung. Die fehlerhaften Funktionswerte resultieren aus der Annahme, daß die Spannungsabhängigkeit der Kriechfunktion lediglich auf die Kriechverformung bezogen wird, die sich infolge der Spannungsänderung zum Zeitpunkt des Beginns des nichtlinearen Kriechens (Zeitpunkt t_2) einstellt. Die Kriechdeformationen im Zeitintervall $t_3 - t_2$, die aus der zum Zeitpunkt t_0 aufgebrachten Spannung resultieren, werden durch den Überproportionalitätsfaktor nicht erfaßt und bleiben damit linear.

Im Unterschied dazu werden bei Anwendung von Beziehung Gl.(2.4.3-16) aus physikalischer Sicht richtige Ergebnisse erzielt. Die gesamte Kriechverformung im Zeitintervall $t_3 - t_2$ wird in Abhängigkeit der Spannung zum Zeitpunkt t_2 mit dem zugehörigen Kriechzahlerhöhungsfaktor vervielfacht.

2.4.4 Vorhersageverfahren

Die derzeit verwendeten Verfahren zur Vorhersage des Kriechens können im Hinblick auf ihren mathematischen Ansatz in zwei Gruppen unterteilt werden.

Die erste Gruppe umfaßt die Verfahren, bei denen die Kriechzahl mit Hilfe eines Produktansatzes ermittelt wird. Dabei ist die Funktion $k(t - \tau)$, die den zeitlichen Verlauf des Kriechens beschreibt, mit einer Reihe das Kriechen beeinflussenden Faktoren k_i multiplikativ verknüpft.

$$\varphi(t, \tau) = k_1(\tau) \dots k_i \dots k(t - \tau) \quad (2.4.4-1)$$

Im Unterschied dazu existieren, analog zu der bereits unter Punkt 2.4.2 beschriebenen *rate of flow method*, Verfahren, bei denen die Gesamtkriechverformung in die Anteile verzögert elastische Verformung und Fließverformung aufgespalten wird. Aus dieser Annahme ergibt sich der Summenansatz für das Kriechen:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_v(t - \tau) + \varphi_f(t) - \varphi_f(\tau), \quad (2.4.4-2)$$

der zum Beispiel in der DIN 4227 [2.15] Anwendung findet. Da beide Verfahren Vor- und Nachteile aufweisen, kann keine allgemeine Empfehlung gegeben werden, welches Verfahren dem anderen vorzuziehen ist.

Der Nachteil des Summenansatzes resultiert in der Annahme der gleichen Zeitfunktion für den Einfluß der Alterung des Betons und für den zeitlichen Verlauf der Fließverformung, so daß der Einfluß des Belastungsalters auf die Kriechverformung zumeist fehlerhaft abgeschätzt wird. Dagegen kann das Betonverhalten bei Entlastung bzw. bei abnehmenden Dehnungen mit Hilfe des Summenansatzes relativ gut beschrieben werden, wobei der Ansatz für die verzögert elastische Verformung für die wirklichkeitsnahe Erfassung verantwortlich ist. Mit dem Produktansatz wird zwar der Einfluß der Alterung besser erfaßt, dafür wird die Rückverformung nach Entlastung im allgemeinen überschätzt [2.1].

Unabhängig davon, welcher Ansatz für die Vorhersage verwendet wird, muß jede Kriechfunktion vier mathematische Restriktionen erfüllen [2.39]. Die Forderung

$$\frac{\partial J(t, \tau)}{\partial t} \geq 0 \quad (2.4.4-3)$$

bedeutet, daß das Kriechen für ein gegebenes Belastungsalter τ eine monoton anwachsende Funktion der Zeit t sein muß. Weiterhin muß die Kriechgeschwindigkeit mit anwachsender Zeitdauer abnehmen:

$$\frac{\partial^2 J(t, \tau)}{\partial t^2} \leq 0. \quad (2.4.4-4)$$

Durch die Bedingungen:

$$\left[\frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} \right]_{(t-\tau)} \leq 0, \quad (2.4.4-5)$$

$$\left[\frac{\partial^2 J(t, \tau)}{\partial \tau^2} \right]_{(t-\tau)} \geq 0 \quad (2.4.4-6)$$

wird gesichert, daß sich bei wachsendem Belastungsalter in der gleichen Zeitdauer ($t-\tau$) immer geringere Kriechdehnungen einstellen, wobei die Größenordnung dieser Reduktion mit größer werdenden τ immer mehr abnimmt.

Nachfolgend werden einige Verfahren zur Vorhersage des Betonkriechens diskutiert, die die oben genannten Bedingungen ausnahmslos erfüllen und zum Teil in nationalen und internationalen Vorschriften verankert sind. Die vorgestellten Verfahren unterscheiden sich nicht nur wesentlich in ihren Ansatzfunktionen sondern auch in der Anzahl der zu berücksichtigenden Einflußfaktoren und damit im Berechnungsaufwand. Weitere Vorhersageverfahren sind z.B. in [2.40-2.48] veröffentlicht.

1. Verfahren nach DIN 4227 [2.15]

Im Verfahren nach DIN 4227 wird die Kriechzahl auf den 28-Tage Elastizitätsmodul bezogen. Die Kriechzahl selbst beruht auf dem Summenansatz nach Gl. (2.4.4-2), wobei die Beziehung zur Ermittlung der Kriechzahl wie folgt angegeben wird:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_{f0} (k_{f,t} - k_{f,\tau}) + 0.4 k_{v,(t-\tau)}. \quad (2.4.4-7)$$

Dabei ist φ_{f0} die Grundfließzahl, die von den klimatischen Verhältnissen und der Betonkonsistenz abhängt. Zur Ermittlung der Beiwerte zur Beschreibung des zeitlichen Ablaufs des Fließens k_f bzw. der verzögert elastischen Verformung k_v werden in der Vorschrift Kurven angegeben, die zwar ein schnelles Ablesen der benötigten Werte erlauben, aber für die numerische Behandlung ungeeignet sind. Frey [2.49] hat diese Kurven deshalb durch eine Summe von acht Exponentialfunktionen angenähert, was aus rheologischer Sicht einer Reihenschaltung von acht Kriechelementen entspricht. Damit erhält er analytische Beziehungen für die Beiwerte k_f und k_v in Gl.(2.4.4-7), die mit den Kurven in DIN 4227 fast identisch sind.

$$k_{f,t} = \frac{2.5}{0.71 + \left(\frac{d_{ef}}{30}\right)^{0.25}} \sum_{i=1}^8 \nu_{f,i} \left[1 - \exp(-t / \tau_{R,i}) \right] \quad (2.4.4-8)$$

$$k_{v,(t-\tau)} = \sum_{i=1}^8 \nu_{v,i} \left[1 - \exp(-(t-\tau) / \tau_{R,i}) \right] \quad (2.4.4-9)$$

Die Retardationszeiten $\tau_{R,i}$ und die Koeffizienten $v_{f,i}$ bzw. $v_{v,i}$ werden in [2.49] wie folgt angegeben (Tabelle 2.4.4-1).

Tabelle 2.4.4-1: Retardationszeiten $\tau_{R,i}$ und Koeffizienten $v_{v,i}$ bzw. $v_{f,i}$ zur analytischen Berechnung der Beiwerte $k_{f,t}$ und $k_{v,(t-\tau)}$ nach DIN 4227 [2.49]

| i | $\tau_{R,i}$ | $v_{v,i}$ | $v_{f,i}$ |
|-----|--------------|-----------|---|
| | Tage | | |
| 1 | 0.2 | 0.25 | 0 |
| 2 | 2.0 | 0.00 | $0.058 - 2.08 \cdot 10^{-3} (0.025 d_{ef} - 4)^2$ |
| 3 | 4.0 | 0.00 | $0.095 - d_{ef} / 8000$ |
| 4 | 10 | 0.10 | $0.11 + 0.07 \exp(-d_{ef} / 7.62)$ |
| 5 | 60 | 0.32 | $0.4 \exp(-d_{ef} / 64.21)$ |
| 6 | 300 | 0.33 | $0.11 + 5.5472 \cdot 10^{-3} (0.025 d_{ef} - 4.9375)^2$ |
| 7 | 1000 | 0.00 | $0.26 - 0.215 \exp(-d_{ef} / 41.24)$ |
| 8 | 4000 | 0.00 | $1 - \sum_{l=1}^7 v_{f,l}$ |

Der Einfluß der Temperatur und der Zementart wird durch die Korrektur des Betonalters berücksichtigt, wobei davon ausgegangen wird, daß sich diese Einflüsse nur auf den Fließanteil der Kriechverformung auswirken.

$$t = k_z \sum_i (T_i + 10^\circ \text{C}) \cdot \Delta t_i / 30^\circ \text{C} \quad (2.4.4-10)$$

Dabei ist k_z der Beiwert zur Berücksichtigung der Erhärtungsgeschwindigkeit der verwendeten Zementsorte auf den Fließanteil der Kriechzahl mit:

$$\begin{aligned} k_z &= 1 \quad \text{für Z 25, Z 35 L, Z 45 L,} \\ k_z &= 2 \quad \text{für Z 35 F, Z 45 F,} \\ k_z &= 3 \quad \text{für Z 55.} \end{aligned}$$

2. Verfahren nach EC2 [2.13]/MC90 [2.10]

Im Gegensatz zu dem Verfahren nach DIN 4227 liegt der Berechnung der Kriechzahlen nach Eurocode 2 ein Produktansatz zugrunde, der dem Ansatz im CEB-FIP MC 90 bis auf geringfügige Abweichungen entspricht. Der Kriechverlauf wird durch eine hyperbolische Potenzfunktion beschrieben, die dem Endwert 1 entgegenstrebt. Durch Multiplikation dieser Verlaufsfunktion mit der Grundkriechzahl ϕ_0 entsteht der vollständige funktionale Zusammenhang für die Kriechzahl nach EC2:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_0 \left(\frac{t - \tau}{\beta_H + t - \tau} \right)^{0.3}, \quad (2.4.4-11)$$

bei dem durch β_H der Einfluß der relativen Luftfeuchtigkeit RH und der wirksamen Bauteildicke h_0 auf den zeitlichen Verlauf des Kriechens wie folgt abgeschätzt wird:

$$\beta_H = 1.5 \left[1 + (0.012 RH)^{18} \right] h_0 + 250 \leq 1500. \quad (2.4.4-12)$$

Die Grundkriechzahl φ_0 wird als Produkt mehrerer voneinander unabhängiger Funktionen angegeben.

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(\tau) \quad (2.4.4-13)$$

Dabei wird durch die vom Belastungszeitpunkt abhängige Funktion $\beta(\tau)$ die Alterung des Betons erfaßt. Mit der Funktion φ_{RH} wird der Einfluß der relativen Luftfeuchte sowie der wirksamen Bauteildicke, mit der das Austrocknungsvermögens des Bauteils beschrieben wird, auf die Größe der Grundkriechzahl berücksichtigt. Der Einfluß des Wasserzementwertes w/z auf die Größe der Kriechverformungen wird indirekt durch die Abhängigkeit der Grundflußzahl von der Betonfestigkeit einbezogen. Die analytischen Beziehungen für diese Funktionen lauten:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH / 100}{0.10 \sqrt[3]{h_0}}, \quad (2.4.4-14)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16.8}{\sqrt{f_{cm}}}, \quad (2.4.4-15)$$

$$\beta(\tau) = \frac{1}{0.1 + \tau^{0.20}}. \quad (2.4.4-16)$$

Der Einfluß hoher bzw. niedriger Temperaturen im Bereich 0°C..80°C auf das Kriechen wird durch die Modifikation des Betonalters nach Gl. (2.2.1-3) beschrieben. Die Festigkeitsentwicklung des Betons wird in Abhängigkeit der verwendeten Zementart durch eine Korrektur des Belastungsalters berücksichtigt. Der mathematische Zusammenhang lautet:

$$\tau = \tau_T \cdot \left(9 / \left[2 + (\tau_T)^{1.2} \right] + 1 \right)^\alpha \geq 0.5, \quad (2.4.4-17)$$

wobei α ein von der Zementart abhängiger Exponent ist und τ_T unter Berücksichtigung der Temperatur mit Gl. (2.2.1-3) bestimmt werden kann.

Wie in DIN 4227 wird die Kriechzahl auf den Elastizitätsmodul des Betons im Alter von 28 Tagen bezogen.

3. Verfahren nach Bazant/Kim [2.6],[2.34],[2.50]

Ein sehr umfangreicher Kriechansatz wird von *Bazant/Kim* in [2.6],[2.34],[2.50] angegeben. Dabei werden die Anteile Grundkriechen und Trocknungskriechen getrennt erfaßt, womit der Tatsache Rechnung getragen wird, daß beide Anteile durch unterschiedliche physikalische Vorgänge hervorgerufen werden. Die Kriechfunktion lautet:

$$J(t, \tau) = q_1 + C_0(t, \tau) + C_d(t, \tau, t_0) + C_p(t, \tau, t_0), \quad (2.4.4-18)$$

wobei mit C_0 das Grundkriechen, mit C_d das zusätzliche Trocknungskriechen während des Belastungszeitraums und mit C_p das Anwachsen der Kriechverformung infolge Austrocknung vor Belastungsbeginn beschrieben wird.

Die Beziehung für das Grundkriechen wird von *Bazant/Kim* [2.34] als Summe eines alterungsabhängigen verzögert elastischen Anteils, eines alterungsunabhängigen verzögert elastischen Anteils und eines Fließanteils angegeben.

$$C_0(t, \tau) = q_2 Q(t, \tau) + q_3 \ln[1 + (t - \tau)^n] + q_4 \ln\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.4.4-19)$$

Der alterungsabhängige verzögert elastische Anteil wird durch die Funktion $Q(t, \tau)$ erfaßt, die durch die Integralgleichung

$$Q(t, \tau) = \int_{t'=\tau}^{t'=t} \left(\frac{1}{t'}\right)^m \frac{n(t' - \tau)^{n-1}}{1 + (t' - \tau)^n} dt' \quad (2.4.4-20)$$

beschrieben wird, welche in geschlossener Form nicht gelöst werden kann. Dabei sind $n = 0.1$, $m = 0.5$ und $\lambda_0 = 1$ Tag empirisch gefundene Materialparameter, die für alle Betonfestigkeitsklassen Gültigkeit besitzen. Die Integralgleichung kann näherungsweise durch eine analytische Beziehung der Form:

$$Q(t, \tau) = Q_f(\tau) \left[1 + \left(\frac{Q_f(\tau)}{Z(t, \tau)} \right)^{r(\tau)} \right]^{-\frac{1}{r(\tau)}} \quad (2.4.4-21)$$

ersetzt werden [2.34], wobei

$$Z(t, \tau) = (\tau)^{-0.5} \ln[1 + (t - \tau)^{0.1}], \quad (2.4.4-22)$$

$$Q_f(\tau) = [0.086 \cdot \tau^{2/9} + 1.21 \cdot \tau^{4/9}]^{-1}, \quad (2.4.4-23)$$

$$r(\tau) = 1.7 \cdot \tau^{0.12} + 8 \quad (2.4.4-24)$$

sind. Diese Näherungsbeziehung weicht von der exakten Lösung des Integrals etwa 0.5% ab [2.26].

Das Trocknungskriechen, hervorgerufen durch den gleichzeitigen Wasserverlust des Betons während der Belastung, wird auch als *Pickett-Effekt* oder als spannungsinduziertes Schwinden bezeichnet. Es hat sich gezeigt, daß dieser Anteil näherungsweise durch eine Funktion erfaßt werden kann, die auf der Grundlage der Beziehung für die mittlere Schwinddehnung aufgebaut ist [2.6]. Aus diesem Grund wird der Verlauf des Trocknungskriechens affin zum zeitlichen Verlauf der mittleren Schwinddehnung (Zeile 3 in Tabelle 2.3-1) angenommen.

$$C_d(t, \tau, t_0) = q_5 k'_h \varepsilon_{sh, \infty} \left[\tanh\left(\frac{t-t_0}{\tau_m}\right)^{1/2} - \tanh\left(\frac{\tau-t_0}{\tau_m}\right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad (2.4.4-25)$$

Dabei ist $\varepsilon_{sh, \infty}$ das Endschwindmaß für eine relative Feuchtigkeit von 0%, τ_m ist die Halbwertszeit für das Trocknungskriechen und durch k'_h wird der Einfluß der relativen Luftfeuchtigkeit berücksichtigt.

Für die zusätzliche Kriechverformung infolge Austrocknung vor Belastungsbeginn wird der semiempirische Ausdruck:

$$C_p(t, \tau, t_0) = 0.7 k''_h \left[\frac{1}{G(7+t_0)} - 0.9^{1/2} \right] \left[\tanh\left(\frac{\tau-t_0}{0.5\tau_m}\right) - \tanh\left(\frac{\tau-t_0}{5\tau_m}\right) \right] C_0(t, \tau) \quad (2.4.4-26)$$

angegeben. Dieser Anteil kann allerdings in den meisten Fällen vernachlässigt werden, außer wenn der Zeitraum vor Erstbelastung ($\tau-t_0$) sehr groß ist und das Bauteil eine sehr geringe Dicke aufweist.

Unter Vernachlässigung des letzten Anteils lautet die vollständige Kriechfunktion:

$$J(t, \tau) = q_1 + q_2 Q(t, \tau) + q_3 \ln[1 + (t - \tau)^n] + q_4 \ln\left(\frac{t}{\tau}\right) + q_5 k'_h \varepsilon_{sh, \infty} \left[\tanh\left(\frac{t-t_0}{\tau_m}\right)^{1/2} - \tanh\left(\frac{\tau-t_0}{\tau_m}\right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (2.4.4-27)$$

bei der die 5 freien Parameter $q_1..q_5$ aus Ergebnissen von Kurzzeitversuchen durch lineare Regression bestimmt werden können. Mit dieser Methode werden in [2.34] und [2.51] übereinstimmende Ergebnisse mit experimentell ermittelten Kriechkurven erzielt. Da Versuchsdaten nur in Ausnahmefällen bekannt sind, werden in [2.34] und [2.6] folgende Beziehungen zur Berechnung der Parameter in Abhängigkeit der Betonzusammensetzung und der Festigkeit angegeben (in $[10^{-6} \text{N}^{-1}/\text{mm}^{-2}]$):

$$q_1 = \frac{10^6}{E_0} = \frac{10^6}{1.5 E_{c,28}}, \quad (2.4.4-28)$$

$$q_2 = 0.02487 (w/c)^{0.8} c^{1.5} (1 - a/\rho_c)^{-0.9} (0.145 f_c)^{-0.5} (s/g)^{0.02} - 56.56, \quad (2.4.4-29)$$

$$q_3 = \alpha q_2, \quad (2.4.4-30)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1.87 \cdot 10^{-5} c + 0.0125 & \text{für } c \geq 416 \text{ kg/m}^3 \\ 6.24 \cdot 10^{-5} c - 0.005 & \text{für } 240 \leq c \leq 416 \text{ kg/m}^3, \\ 0.01 & \text{für } c \leq 240 \text{ kg/m}^3 \end{cases}$$

$$q_4 = 6 \cdot (w/c)^{2.3} c^{0.2} (1 - a/\rho_c)^{0.39} (0.145 f_c)^{-0.46} (s/g)^{-0.73}, \quad (2.4.4-31)$$

$$q_5 = \frac{1450 \cdot 10^3}{3\sqrt{f_c}}, \quad (2.4.4-32)$$

mit c - Zementinhalt [kg/m³],
 w - Wasserinhalt [kg/m³],
 s - Sandinhalt [kg/m³],
 g - Kiesinhalt [kg/m³],
 a - Zuschlagstoffinhalt [kg/m³],
 ρ - Einheitsmasse Beton [kg/m³],
 f_c - 28 Tage Zylinderdruckfestigkeit [N/mm²],
 $E_{c,28}$ - Elastizitätsmodul Beton [N/mm²].

Der Einfluß der Temperatur auf das Kriechen wird durch eine Korrektur des Betonalters erfaßt, wobei einerseits das Anwachsen der Hydratationsgeschwindigkeit und andererseits die Beschleunigung des Kriechens bei steigender Temperatur berücksichtigt wird. Die Kriechfunktion ergibt sich zu [2.50]:

$$J(t_T, \tau_e) = q_1 + q_2 Q(t_T, \tau_e) + q_3 \ln[1 + (t_T - \tau_e)^n] + q_4 \ln\left(\frac{t_T}{\tau_e}\right) + q_5 k'_h \varepsilon_{sh,\infty} \left[\tanh\left(\frac{t_e - t_{e0}}{\tau_m}\right)^{1/2} - \tanh\left(\frac{\tau'_e - t_{e0}}{\tau_m}\right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (2.4.4-33)$$

wobei die korrigierten Zeitpunkte t_T , t_e , τ_e und τ'_e mit einem Ansatz, der auf der Aktivierungsenergie beruht, berechnet werden können.

In Abbildung 2.4.4-1 sind die zeitlichen Verläufe der in diesem Kapitel vorgestellten Kriechfunktionen bzw. Kriechgeschwindigkeiten bei verschiedenen Belastungsaltern dargestellt, die relativ stark voneinander abweichen. Diese Abweichungen sind darin begründet, daß die mit Hilfe der Verfahren berechneten Kurven nur Mittelwerte einer bestimmten Anzahl vorliegender Versuchswerte sind, die selbst bei gleichen Materialparametern und Umwelteinflüssen großen Schwankungen unterworfen sind. Im allgemeinen kann davon ausgegangen werden, daß das Verfahren nach EC 2 das mittlere Langzeitverhalten des Betons besser beschreibt als das Verfahren nach DIN 4227, da eine größere Anzahl von Versuchsdaten als Vergleichsgrößen für die Optimierung der Kriechzahl vorlag. Dies wird auch durch den mittleren Variationskoeffizienten ausgedrückt, der für das Verfahren nach DIN 4227 mit etwa 45% und für das Verfahren nach EC 2 mit etwa 33% angegeben wird [2.1]. Das Verfahren nach *Bazant/Kim* ermöglicht eine relativ genaue

Anpassung an experimentell ermittelte Kriechkurven, wenn die freien Parameter $q_1..q_5$ aus Kurzzeitversuchen durch lineare Regression gewonnen werden. In den meisten Fällen werden die Parameter jedoch aus der Zusammensetzung und der Festigkeit des Betons ermittelt, wobei ebenfalls größere Abweichungen auftreten können [2.50]. Ein Vorteil der Verfahren nach EC 2 und nach *Bazant/Kim* gegenüber dem Verfahren nach DIN 4227 ist die bessere Erfassung der schnell eintretenden Kriechverformungen (Kurzzeitkriechen) nach Aufbringen der Belastung in jungem Betonalter.

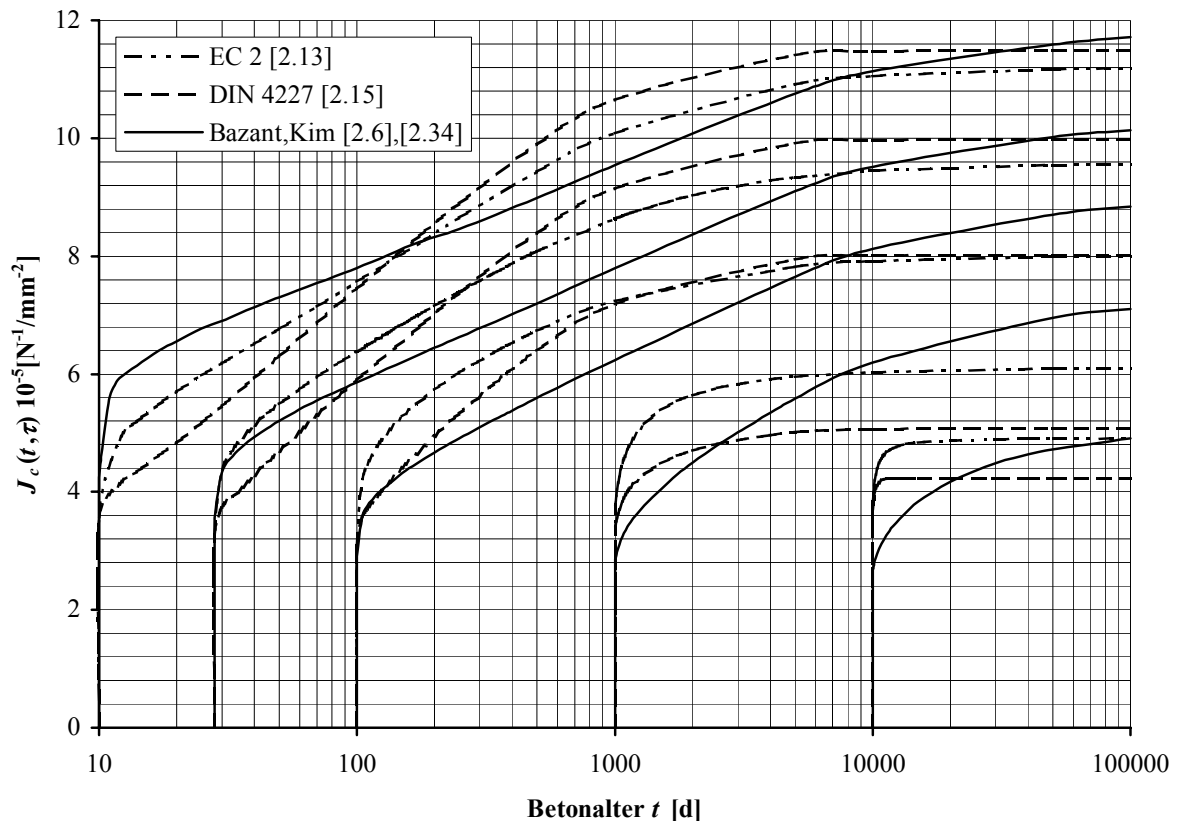


Abb. 2.4.4-1: Verlauf der Kriechfunktion nach den Vorhersageverfahren nach EC2 [2.13], nach DIN 4227 (Näherungsbeziehung) [2.49] und *Bazant/Kim* [2.6],[2.34],[2.50]
 Randbedingungen: $A/U = 100 \text{ mm}$, $RH = 80\%$, $T = 20^\circ\text{C}$, $f_c = 33 \text{ N/mm}^2$,
 $w:z:s:g = 0.5:1:1.79:2.71$, $z = 419 \text{ kg/m}^3$, Zementsorte II

2.4.5 Verknüpfung der Ansatzfunktionen mit den Kriechzahlerhöhungsfaktoren

Ausgehend von dem Sachverhalt, daß sowohl die verschiedenen Ansatzfunktionen als auch die unterschiedlichen Kriechzahlerhöhungsfaktoren aufgestellt wurden, um jeweils die gleichen strukturverändernden Vorgänge zu beschreiben, lassen sich die Ansatzfunktionen in beliebiger Weise mit den Kriechzahlerhöhungsfaktoren verknüpfen. Die so entstehenden nichtlinearen Kriechfunktionen lassen sich in allgemeiner Form wie folgt angeben:

$$J_c(\sigma_c, t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} \left(1 + F[\sigma_c, t, \tau] \varphi_c(t, \tau) \right). \quad (2.4.5-1)$$

Ist das Spannungsniveau über den Belastungszeitraum konstant, so unterliegt auch die nichtlineare Kriechfunktion der mathematischen Restriktion

$$\frac{\partial J_c(\sigma_c, t, \tau)}{\partial t} \geq 0. \quad (2.4.5-2)$$

Unter der Voraussetzung, daß die 1. Ableitung der linearen Ansatzfunktion nach t immer größer 0 ist, ist bei Verwendung eines zeitunabhängigen Kriechzahlerhöhungsfaktors die Bedingung (2.4.5-2) grundsätzlich erfüllt, da dieser als konstanter Faktor keinen Einfluß auf das Vorzeichen der Ableitungen hat.

Das Einhalten der Restriktion (2.4.5-2) ist demzufolge nur für den belastungsdauerabhängigen Kriechzahlerhöhungsfaktor nach Gl.(2.4.3-11) zu untersuchen. Für die Differentiation der nichtlinearen Kriechfunktion gilt nach der Produktregel:

$$\frac{\partial J_c(\sigma_c, t, \tau)}{\partial t} = \frac{1}{E_c(\tau)} \left[\frac{\partial F[\sigma_c, t, \tau]}{\partial t} \varphi_c(t, \tau) + F[\sigma_c, t, \tau] \frac{\partial \varphi_c(t, \tau)}{\partial t} \right], \quad (2.4.5-3)$$

woraus aufgrund der Voraussetzungen

$$\frac{\partial \varphi_c(t, \tau)}{\partial t} \geq 0, \quad F[\sigma_c, t, \tau] \geq 0 \quad (2.4.5-4)$$

folgt, daß der 2. Term in der Klammer stets nichtnegativ sein muß. Die Bedingung (2.4.5-2) ist demzufolge dann erfüllt, wenn nachgewiesen werden kann, daß die erste Ableitung des Kriechzahlerhöhungsfaktors nach t ebenfalls nichtnegativ ist. Nach Differentiation erhält man allerdings:

$$\frac{\partial F[\sigma_c, t, \tau]}{\partial t} = \beta_{ft}^{1/\sqrt{t-\tau}} \beta_f \beta_\tau \left(\frac{\sigma_c}{f_c} \right)^3 (\ln \beta_{ft}) \left(-\frac{1}{2\sqrt{(t-\tau)^3}} \right) < 0, \quad (2.4.5-5)$$

so daß der Klammerausdruck in Gl.(2.4.5-3) bereichsweise positiv als auch negativ werden kann. Eine Aussage über die Größe des negativen, und damit nicht zulässigen Bereiches erhält man nur in Abhängigkeit der verwendeten linearen Kriechfunktion, des vorhandenen Spannungsniveaus und der zur Berechnung des Kriechzahlerhöhungsfaktors notwendigen Koeffizienten. Die Anwendungsbeschränkungen werden hier für die Verknüpfung des Kriechzahlerhöhungsfaktors nach Gl.(2.4.3-11) mit der im EC2 vorgeschlagenen linearen Kriechfunktion untersucht, da nachfolgende numerische Untersuchungen auf Grundlage dieses nichtlinearen Kriechansatzes durchgeführt werden.

Bei Verknüpfung des Kriechzahlerhöhungsfaktors mit der im EC2 vorgeschlagenen Kriechfunktion ergibt sich folgende Beziehung aus der Differentiation nach t :

$$\frac{\partial J_c(\sigma_c, t, \tau)}{\partial t} = \frac{\varphi_0}{E_{c,28}} \left(\frac{t-\tau}{\beta_H + t-\tau} \right)^{0.3} \cdot \left[\frac{\beta_H}{(\beta_H + t-\tau)(t-\tau)} + \beta_{ft}^{1/\sqrt{t-\tau}} \beta_f \beta_\tau \left(\frac{\sigma_c}{f_c} \right)^3 \cdot \left(\ln \beta_{ft} \left(-\frac{1}{2} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \right) + \frac{\beta_H}{(\beta_H + t-\tau)(t-\tau)} \right) \right]. \quad (2.4.5-6)$$

Da die Größe des negativen Bereichs hauptsächlich von der Belastungsdauer bestimmt wird, erfolgte die Auswertung von Gl.(5.4.5-6) in Abhängigkeit von $t-\tau$ als variable Größe. Der Einfluß weiterer wählbarer Größen läßt sich aus der Gleichungsstruktur leicht abschätzen, so daß mit folgenden Festlegungen die ungünstigsten Fälle berücksichtigt werden.

$$\beta_H = 250, \quad f_c = 6 \text{ kN / cm}^2, \quad \sigma_c / f_c = 1$$

Die Wahl der maximal möglichen Betonfestigkeit erfolgte dabei unter dem Gesichtspunkt, daß die Kriechfunktion nach EC2 lediglich für Normalbeton Gültigkeit besitzt. In Abb. 2.4.5-1 ist die Beziehung (5.4.5-6) für verschiedene Belastungsalter graphisch ausgewertet.

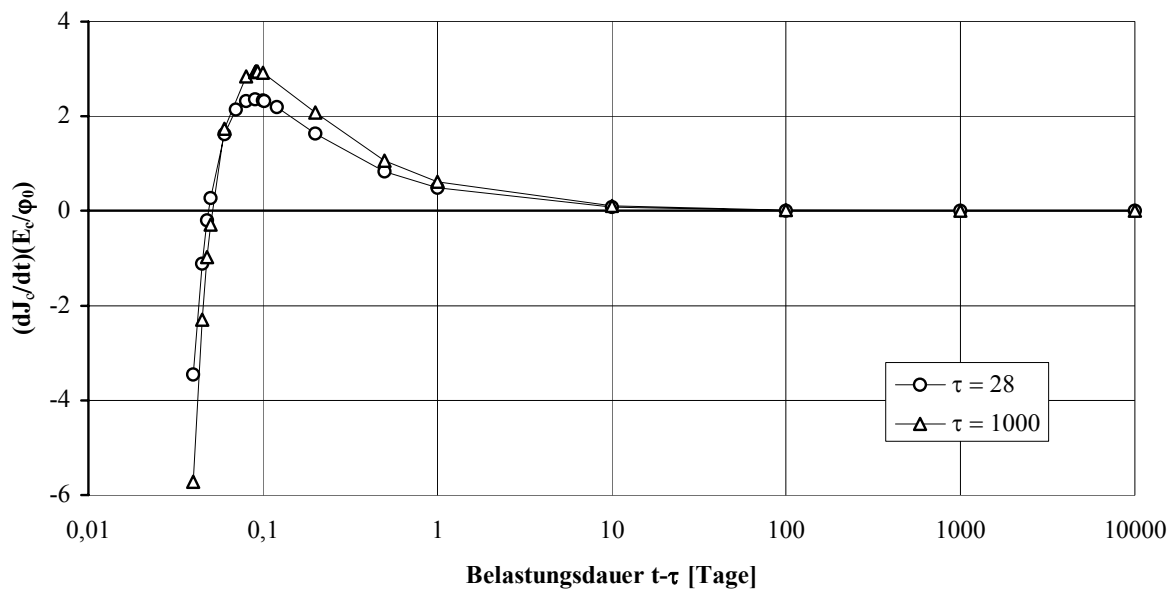


Abb. 2.4.5-1: Auswertung von Gl.(2.4.5-6) für verschiedene Belastungsalter

Aus der graphischen Darstellung ist zu entnehmen, daß sich die erste Ableitung der nichtlinearen Kriechfunktion nach t bis zu einer Belastungsdauer von etwa 0.05 Tagen (=70min.) im unzulässigen negativen Bereich befindet. Der Einfluß des Belastungsalter ist dabei relativ gering. Das weitere Ansteigen der Kriechgeschwindigkeit bis zu einer Belastungsdauer von etwa 0.1 Tag (=140min.) bedeutet, daß die für Kriechfunktionen im linearen Bereich notwendige Bedingung

$$\frac{\partial^2 J_c(\sigma_c, t, \tau)}{\partial t^2} \leq 0 \quad (2.4.5-7)$$

nicht erfüllt ist und damit Tertiärkriechen vorliegt. Mit weiterer Belastungsdauer geht die Kriechfunktion sehr schnell zum Primärkriechen über, d.h. die Kriechgeschwindigkeit nimmt mit zunehmender Belastungsdauer immer weiter ab, bleibt jedoch stets positiv.

Zusätzlich zu den Bedingungen Gl.(2.4.5-2,7) muß die nichtlineare Kriechfunktion den Restriktionen

$$\left[\frac{\partial J_c(\sigma_c, t, \tau)}{\partial \tau} \right]_{(t-\tau)} \leq 0, \quad (2.4.5-8)$$

$$\left[\frac{\partial^2 J_c(\sigma_c, t, \tau)}{\partial \tau^2} \right]_{(t-\tau)} \geq 0. \quad (2.4.5-9)$$

genügen. Die Differentiation nach dem Belastungsalter τ ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_c(\sigma_c, t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\varphi_0}{E_c} \left(\frac{t-\tau}{\beta_H + t - \tau} \right)^{0.3} \cdot \left[(F[\sigma_c, t, \tau] - 1) \frac{1}{2} \left[\ln \beta_{fi}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{5\tau} \right] - \right. \\ \left. F[\sigma_c, t, \tau] \left(\frac{0.2\tau^{-0.8}}{0.1 + \tau^{0.2}} + \frac{0.3\beta_H}{(t-\tau)(\beta_H + t - \tau)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.5-10)$$

Bei Betrachtung von Gl.(2.4.5-10) wird deutlich, daß auch in diesem Fall keine eindeutige Aussage über das Vorzeichen der Ableitung getroffen werden kann, weshalb die Auswertung in der gleichen Weise wie bei Gl.(5.4.5-6) erfolgt. Dabei wird die Belastungsdauer als Scharparameter gewählt.

Aus Abb.2.4.5-2 folgt, daß bei Belastungszeiträumen < 0.5 Tage positive Ableitungen auftreten, was bedeutet, daß die Kriechverformungen in einem festgelegten Zeitintervall um so größer werden, je älter der Beton bei Belastungsbeginn ist. Diese Aussage steht im Widerspruch zum realen Betonverhalten. Erst bei Belastungszeiträumen ≥ 0.5 Tage (≈ 700 min.) ist die Ableitung für jedes Belastungsalter negativ. Aufgrund des sich aus Forderung Gl.(2.4.5-2) ergebenden kleineren unzulässigen Bereiches stellt der Grenzwert $t-\tau \geq 0.5$ auch das maßgebende Kriterium für die Anwendung der hier untersuchten nichtlinearen Kriechfunktion dar.

Der Anstieg der dargestellten Kurven ist im gesamten Bereich über positiv, so daß Bedingung Gl.(2.4.5-9) in jedem Fall erfüllt ist. Damit nimmt der Alterungseinfluß mit wachsendem Belastungsalter immer mehr ab. Aus der größeren Stauchung der Kurven entlang der Zeitachse und der damit schnelleren Konvergenz bei anwachsender Belastungsdauer läßt sich ableiten, daß sich die Betonalterung auf die kurzzeitigen Kriechverformungen in stärkerem Maße auswirkt als auf Kriechverformungen unter langer Zeitdauer.

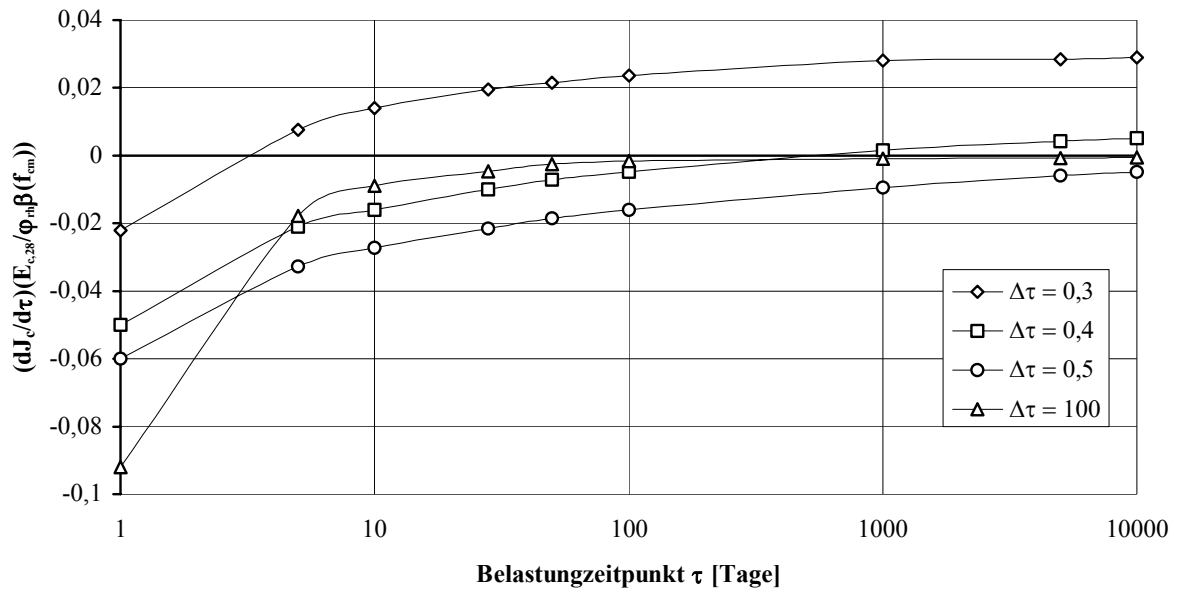


Abb.2.4.5-2: Auswertung der Gl.(2.4.5-10) für verschiedene Belastungsdauern

Die Untersuchungsergebnisse werden im weiteren dadurch berücksichtigt, daß der Beiwert α in Gl.(2.4.3-11) mit dem Wert

$$\alpha \geq \sqrt{0,5} \approx 0,71 \quad (2.4.5-11)$$

begrenzt wird. Damit besteht weiterhin die Möglichkeit, Kriechverformungen infolge extrem kurzer Belastungsdauer zu erfassen, die allerdings im nichtlinearen Bereich etwas zu gering abgeschätzt werden. Aufgrund der bis zum Zeitpunkt von 700min. zu erwartenden verhältnismäßig geringen Kriechdeformationen wird der Fehler sehr klein sein und im Bereich der Vorhersageunsicherheit liegen.

Im Rahmen der Arbeit durchgeführte Untersuchungen zeigen zudem, daß aus der Berücksichtigung der Belastungsdauer bei der Formulierung des Kriechzahlerhöhungsfaktors keine wesentlichen Ergebnisunterschiede im Vergleich zur Verwendung belastungsdauer-unabhängiger Kriechzahlerhöhungsfaktoren resultieren.

2.5 Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons unter kurzzeitiger Lasteinwirkung

In der Fachliteratur wird das Verhalten des Betons unter kurzzeitiger und langzeitiger Lasteinwirkung zumeist getrennt behandelt, wobei das Kurzzeitverhalten im allgemeinen durch eine zeitunabhängige Spannungs-Dehnungs-Beziehungen beschrieben wird.

In Abb. 2.5-1 sind die Spannungs-Dehnungslinien mittig gedrückter Betonprismen unterschiedlicher Festigkeiten bei lastgesteuerter bzw. verformungsgesteuerter Versuchsdurchführung dargestellt. Dabei ist im unteren Lastbereich zunächst ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen Druckspannung und Stauchung zu erkennen, ausgeprägtes nichtlineares Verhalten beginnt erst bei einer Spannung von etwa 40% der Betondruckfestigkeit.

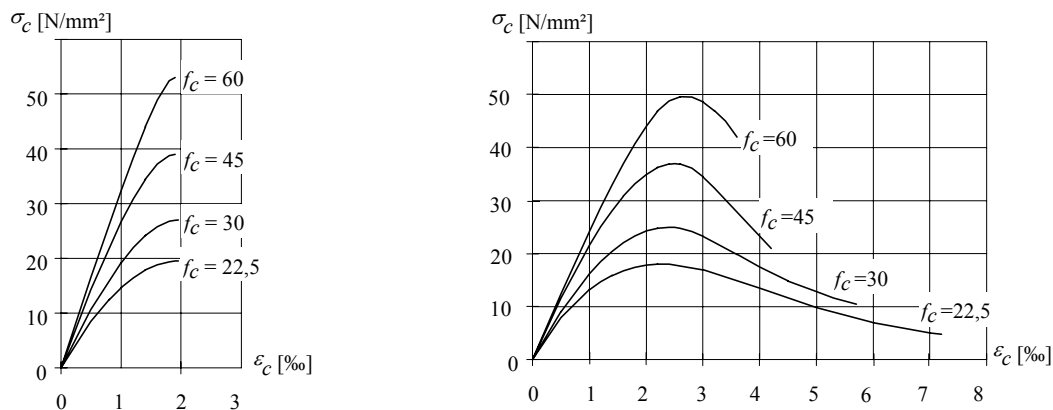
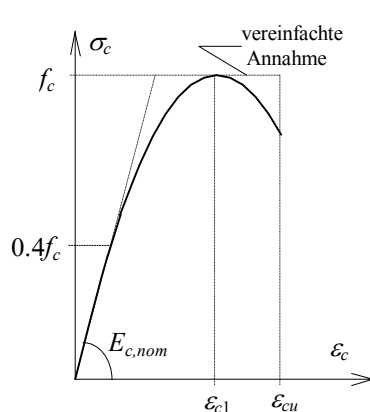


Abb. 2.5-1: Spannungs-Dehnungslinien für Betone unterschiedlicher Druckfestigkeit bei konstanter Belastungsgeschwindigkeit bzw. konstanter Dehngeschwindigkeit (entnommen aus [2.11])

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungslinie wird hauptsächlich durch die Betonfestigkeit, die Größe des Elastizitätsmoduls und durch die aufgebrachte Dehngeschwindigkeit beeinflusst. Mit zunehmender Dehngeschwindigkeit nimmt die zur maximalen Druckspannung gehörende Dehnung und die Bruchdehnung ab, der Verlauf des abfallenden Astes wird steiler [2.52].

Aus der Tatsache, daß die den Verlauf der Spannungs-Dehnungslinie beeinflussenden Größen selbst in weiten Grenzen streuen (Abschn. 2.2.1 - 2.2.3) ergibt sich, daß das Spannungs-Dehnungsverhalten von Betonen einer Festigkeitsklasse sehr unterschiedlich sein kann. Sofern keine Versuchsdaten vorliegen, kann jeder Festigkeitsklasse nur eine angenäherte Spannungs-Dehnungslinie zugeordnet werden, bei deren mathematischen Formulierung die Gesichtspunkte Wirklichkeitsnähe und Anwendbarkeit berücksichtigt werden müssen.

Prinzipiell existiert eine Vielzahl von Möglichkeiten, um den Verlauf der Betonarbeitslinie zu beschreiben. In Abb. 2.5-2 ist die rechnerische Betonarbeitslinie nach EC2 [2.13] dargestellt, die einem nichtlinearen funktionalen Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung folgt. Diese Spannungs-Dehnungslinien beschreiben das Verformungsverhalten des Betons relativ genau, wenn die Belastung nur kurzzeitig einwirkt und sollten daher nur für die Schnittgrößenermittlung bei nichtlinearen Berechnungen verwendet werden [2.53].



$$\sigma_c = \frac{k\eta_e - \eta_e^2}{1 + (k-2)\eta_e} f_c$$

mit:

$$\eta_e = \epsilon_c / \epsilon_{c1}$$

$$k = 1,1 E_{c,nom} \epsilon_{c1} / f_c$$

Stauchung im Scheitelpunkt:

$$\epsilon_{c1} = -0.0022$$

Grenzstauchung:

ϵ_{cu} - von Betonfestigkeitsklasse abhängig

Abb. 2.5-2: Spannungs-Dehnungslinien des Betons unter einachsiger Druckbeanspruchung nach EC2

Eine andere Möglichkeit der mathematischen Erfassung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens des Betons ist die bereichsweise Beschreibung der Arbeitslinie durch mehrere unterschiedliche Funktionen. Die gebräuchlichsten unter ihnen sind das Parabel-Rechteck-Diagramm und das bilineare Diagramm (Abb.2.5-3). Das Parabel-Rechteck-Diagramm ist die bevorzugte Idealisierung für die Querschnittsbemessung nach EC2, das bilineare Diagramm darf alternativ benutzt werden. Die idealisierten Spannungs-Dehnungslinien gelten allerdings „streng“ nur für den rechnerischen Bruchzustand und sind durch eine konstante Grenzstauchung von 3,5‰ und einen affinen Verlauf für alle Betonfestigkeitsklassen gekennzeichnet [2.53].

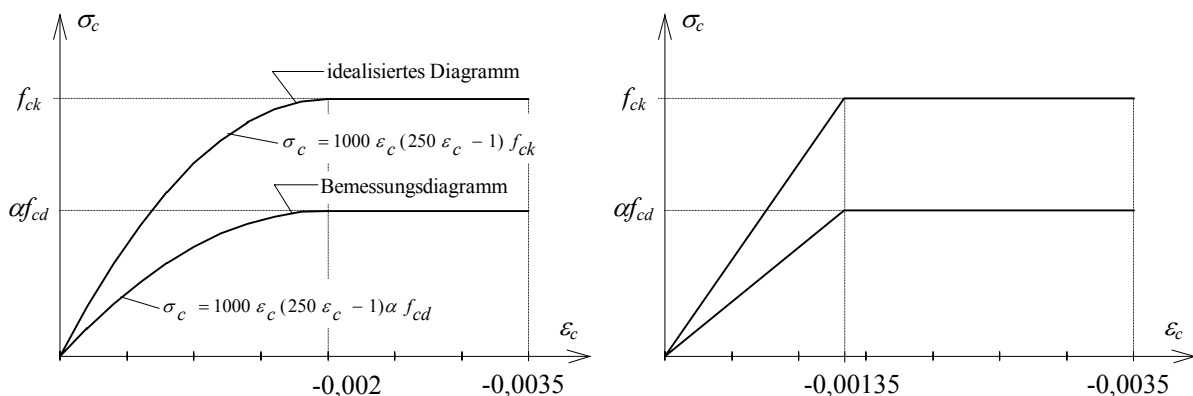


Abb. 2.5-3: Parabel-Rechteck-Diagramm und bilineares Diagramm für auf Druck beanspruchten Beton [2.13]

Die dritte Möglichkeit, die in diesem Zusammenhang aufgezeigt werden soll, ist die Beschreibung des Kurzzeitverhaltens des Betons durch eine Funktion, die sich summarisch aus einem linear elastischem Anteil und einem nichtlinearen Anteil zusammensetzt. Diese Form der Beschreibung, die zum Beispiel in [2.54] und [2.55] verwendet wird, liefert den Ansatz für die Erfassung des Betonverhaltens unter kurzzeitiger Lasteinwirkung in der vorliegenden Arbeit.

Wie eingangs dargestellt, ist die Form der Beton-Spannungsdehnungslinie in starkem Maße von der eingetragenen Belastungsgeschwindigkeit bzw. Dehngeschwindigkeit abhängig, d.h.

die Arbeitslinie des Betons ist um so steiler, desto kürzer der Zeitraum ist, in dem die volle Last aufgebracht wird. Für den theoretischen Fall einer unendlich hohen Belastungsgeschwindigkeit würde die Spannungs-Dehnungslinie bis zum Eintreten des schlagartigen Bruchs der Betonprobe fast keine Krümmung aufweisen. Aus diesen Beobachtungen heraus kann geschlußfolgert werden, daß die unmittelbar nach Belastungsbeginn eintretenden Mikrorisse, die für die Krümmung der Betonarbeitslinie im oberen Spannungsbereich verantwortlich sind, einen gewissen Zeitraum benötigen, um sich zu entwickeln. Diese Annahme liegt zum Beispiel auch der Arbeit [2.4] zugrunde. Eine weitere Bestätigung ist, daß die von *Grasser* [2.56] vorgeschlagene Spannungs-Dehnungslinie, die in den EC2 übernommen wurde, für eine Belastungsdauer von 20min. gilt. Das bedeutet, daß durch die heutzutage gebräuchlichen Kurzzeit-Spannungs-Dehnungslinien ein Teil der Kriechdeformationen bereits erfaßt wird.

In Abb.2.5-4 wird gezeigt, daß sich die Kurzzeit-Spannungs-Dehnungslinie des Betons näherungsweise durch eine zeitabhängige Materialbeziehung unter Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens darstellen läßt. Die Gesamtverformung ergibt sich dabei durch die Überlagerung eines linear elastischen Anteils (gültig für sehr große Belastungsgeschwindigkeiten) mit den sehr schnell eintretenden viskosen Verformungen als nichtlinearen Anteil, wobei die verzögert elastischen Verformungen einen wesentlich größeren Anteil als die Fließverformungen liefern.

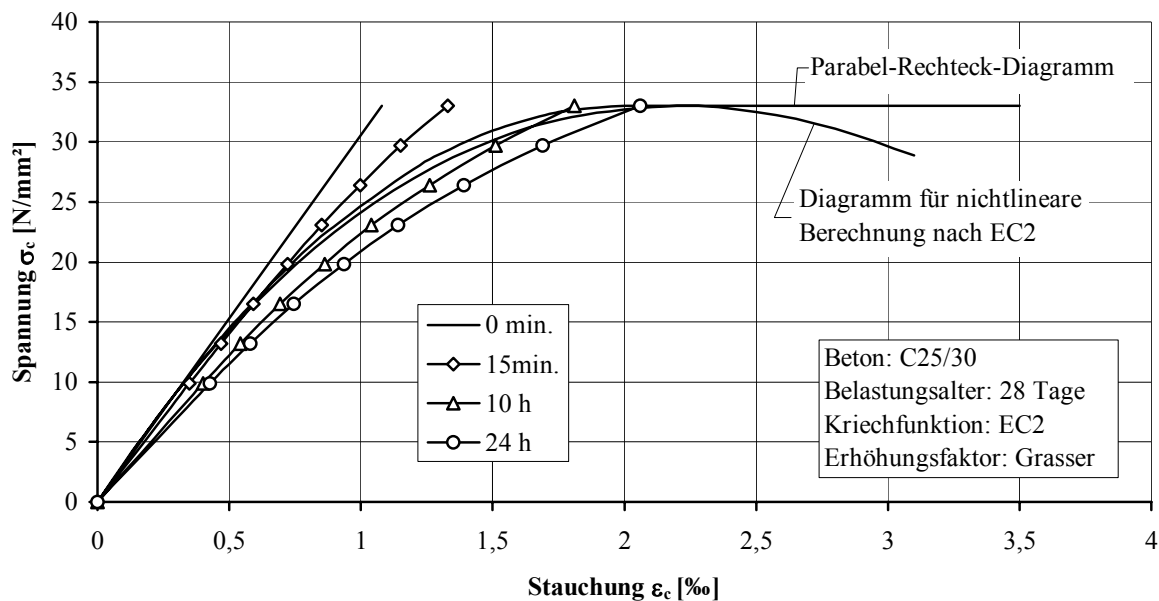


Abb. 2.5-4: Betonstauchungen nach kurzer Belastungsdauer im Vergleich zu Kurzzeit-Spannungs-Dehnungslinien (mittlere Betonfestigkeit $f_{cm} = f_{ck} + 8$ N/mm² als Bezugsfestigkeit gewählt)

3 Materialverhalten des Stahls

3.1 Betonstahl und allgemeiner Baustahl

Die im Stahlbetonbau verwendeten Betonstähle können nach Art ihrer Herstellung in warmgewalzte (naturharte) Stähle, in thermisch verfestigte (wärmebehandelte) Stähle und in kaltverformte Stähle eingeteilt werden. Die bei einachsiger Zug- bzw. Druckbelastung entstehenden Verformungen sind bei allen Stählen bis zu einem bestimmten Spannungswert linear von der aufgetragenen Spannung abhängig. In diesem Bereich kann die Spannungsdehnungslinie durch das *Hookesche Gesetz* zutreffend beschrieben werden:

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s}, \quad (3.1-1)$$

wobei der Elastizitätsmodul E_s sowohl für den Zugbereich als auch für den Druckbereich Gültigkeit hat und zwischen 200000 und 220000 N/mm² liegt.

Die Gültigkeit des *Hookeschen Gesetzes* ist durch die Proportionalitätsgrenze beschränkt. Die sich gegenüber den Spannungen schneller entwickelnden Dehnungen sind allerdings bis zum Erreichen der Elastizitätsgrenze fast vollständig reversibel, so daß in diesem Bereich elastisches Verhalten vorausgesetzt werden kann. Erst ab diesem Grenzwert stellen sich bleibende Verformungen ein, die jedoch im Vergleich zu den elastischen Verformungen relativ gering sind.

Bei weiterer Belastung treten große qualitative Unterschiede im Spannungs-Dehnungsverhalten zwischen den nach der Art ihrer Herstellung klassifizierten Stahlsorten auf. Warmgewalzte bzw. thermisch verfestigten Stähle verfügen über eine ausgeprägte Streckgrenze, nach deren Erreichen sich zunächst große plastische Verformungen ohne weiteren Spannungszuwachs einstellen. Nach Abschluß dieses Fließvorgangs kommt es zu einer nochmaligen Spannungserhöhung bis zum Erreichen der Zugfestigkeit, wonach bei lastgesteuerter Versuchsdurchführung der Bruch eintritt. Bei verformungsgesteuerter Versuchsdurchführung kommt es nach Erreichen der Maximalspannung zu einer Abnahme der aufnehmbaren Zugkraft bei weiterhin zunehmenden Verformungen. Der Bruch tritt an der sich bildenden Einschnürungsstelle ein, da die Spannung dort am größten ist. Wird die abnehmende Zugkraft auf die verminderte Querschnittsfläche bezogen, können die an dieser Stelle auftretenden Spannungen noch über dem Wert der Zugfestigkeit liegen.

Im Gegensatz dazu verläuft der Übergang vom elastischen zum plastischen Bereich bei kaltverfestigten Stählen fließend. Aus diesem Grund wird mit der $\sigma_{0,2}$ -Grenze die Stahlspannung als Streckgrenze definiert, die eine bleibende Dehnung von 0.2% verursacht. In gleicher Weise erfolgt die Definition der Elastizitätsgrenze als $\sigma_{0,01}$ -Grenze.

Die mathematische Beschreibung des Materialverhaltens des Stahls unter Berücksichtigung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung oberhalb der Elastizitätsgrenze kann mit Hilfe des *Ramberg-Osgood-Polynoms* erfolgen, das sich durch Variation des Parameters m sowohl auf naturharte als auch auf kaltverfestigte Stähle anwenden läßt [3.1].

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + \varepsilon_{pl} \left(\frac{\sigma_s}{f_{sy}} \right)^m \quad (3.1-2)$$

Aus der Definition der Streckgrenze bei kaltverfestigten Stählen als $\sigma_{0,2}$ -Grenze ergibt sich ε_{pl} zu 0.2%. Für die Wahl des Parameters m gibt es unterschiedliche Vorschläge. Eine von mehreren Autoren [3.1], [3.2] angewandte Näherung ist $m = 20$ für kaltverfestigte Stähle und $m = 50$ für naturharte bzw. thermisch verfestigte Stähle. Der Vorschlag von Dilger [3.3], für naturharte Stähle $m = \infty$ zu setzen, führt zu dem linear elastisch - ideal plastischen Spannungs-Dehnungsverlauf wie er als idealisierte Arbeitslinie beispielsweise in DIN 1045 angegeben wird. Ein Überblick über weitere Möglichkeiten der Beschreibung der Stahlarbeitslinie wird z.B. in [3.4] gegeben.

Größere zeitabhängige Verformungen werden bei Stahl nur im Bereich hoher Temperaturen ($T > 400^\circ\text{C}$) beobachtet. Da in der vorliegenden Arbeit nur Tragwerke unter normalen Klimabedingungen untersucht werden, werden die Kriechverformungen des Betonstahls vernachlässigt.

Die Gesamtdehnung des Stahls setzt sich demzufolge lediglich aus einem linear elastischen Anteil und einem nichtlinear elastisch-plastischen Anteil zusammen, so daß Gl.(3.1-2) auch bei über den Zeitraum veränderlichen Spannungen für jeden Zeitpunkt Gültigkeit hat. Nach Ersetzen des zweiten Terms durch $\varepsilon_{s,nl}$ lautet die Spannungs-Dehnungsbeziehung des Stahls zum Zeitpunkt t :

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t)}{E_s} + \varepsilon_{s,nl}(t). \quad (3.1-3)$$

Die in diesem Kapitel angegebenen Beziehungen gelten in gleicher Weise für allgemeine Baustähle, wobei der Parameter m , analog zu den naturharten bzw. thermisch verfestigten Betonstählen, gleich 50 gesetzt wird.

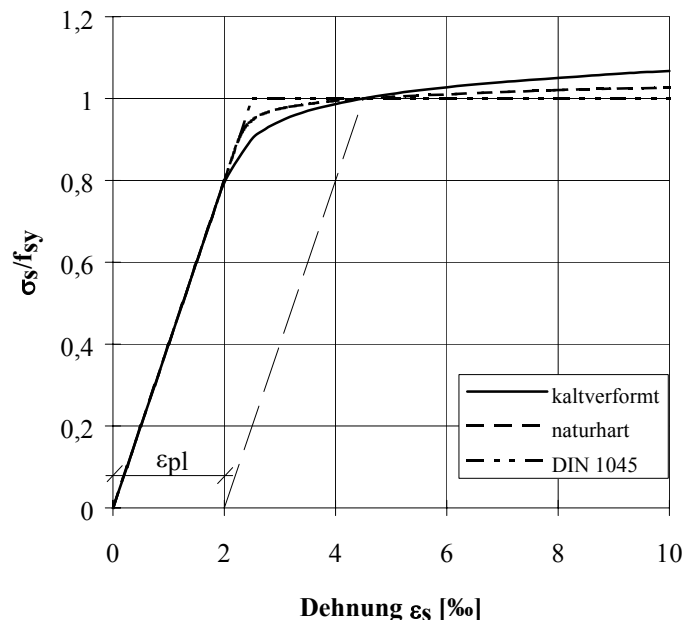


Abb.3.1-1: Beschreibung der Stahlkennlinie mit Hilfe des Ramberg-Osgood-Polynoms

3.2 Spannstahl

Unter kurzzeitiger Lasteinwirkung ist der Verlauf der Spannungs-Dehnungslinie des Spannstahls dem Verlauf der kaltverformten Betonstähle qualitativ ähnlich, wobei die Festigkeitswerte der Spannstähle wesentlich über denen der Betonstähle liegen. Eine Abweichung ergibt sich mit der Festlegung der $\sigma_{0,1}$ -Grenze als Streckgrenze im EC2 und MC 90, wogegen in DIN 4227 die $\sigma_{0,2}$ -Grenze als Streckgrenze definiert ist. Die Materialbeziehung für Kurzzeitbelastung kann daher analog Gl.(3.1-2) mit

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + \varepsilon_{pl} \left(\frac{\sigma_p}{f_{p0,1k} \text{ bzw. } \beta_{0,2}} \right)^m \quad (3.2-1)$$

angegeben werden. Die Werte für die charakteristische 0,1% (0,2%)-Dehngrenze $f_{p0,1k}$ ($\beta_{0,2}$) variieren in Abhängigkeit der Art bzw. der Festigkeitsklasse des Spannstahls, ε_{pl} ist je nach Definition der Streckgrenze einzusetzen. Der Elastizitätsmodul des Spannstahls liegt zwischen 195000 und 205000 N/mm² und kann im Mittel mit 200000 N/mm² angenommen werden.

Bei der Berechnung vorgespannter Stahlbetonkonstruktionen läßt sich die gesamte, im Spannstahl vorhandene Spannung σ_p in einen Vorspannungsanteil $\sigma_{p,V}$ und in einen Anteil $\sigma_{p,\Delta}$, der infolge zusätzlicher Belastung bzw. Kriechen und Schwinden des Betons entsteht, zerlegen. Der durch die Vorspannung $\sigma_{p,V}$ erzeugte Dehnungsanteil wird im allgemeinen als Vordehnung $\varepsilon_{p,V}$ bezeichnet und ist als die elastische Dehnung definiert, die der Spannstahl dem Beton voraus hat.

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,V} + \frac{\sigma_{p,\Delta}}{E_p} + \varepsilon_{pl} \left(\frac{\sigma_p}{f_{p0,1k} \text{ bzw. } \beta_{0,2}} \right)^m \quad (3.2-2)$$

Im Gegensatz zum Betonstahl treten im Spannstahl infolge Dauerbelastung schon im normalen Temperaturbereich zusätzliche Langzeitverformungen auf, die zu Vorspannverlusten und damit zu Veränderungen des Spannungszustands vorgespannter Tragwerke führen. Unter Annahme eines affinen Verlaufs der zeitabhängigen Verformungen zu den Langzeitdeformationen des Betons, in Anlehnung an [3.5], kann das zeitabhängige Materialgesetz des Spannstahls in der Form

$$\dot{\varepsilon}_p(t) = \frac{\dot{\sigma}_{p,\Delta}(t)}{E_p} - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_p(\tau) \frac{\partial \dot{J}_p(\sigma_p(t), t-\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3.2-3)$$

aufgestellt werden, wobei von einer über den Zeitraum konstanten Vordehnung ausgegangen werden kann. Dabei ist $\dot{J}_p(\sigma_p(t), t-\tau)$ die spannungsabhängige Kriechgeschwindigkeit für den Spannstahl, die unter konstanter Spannung der Beziehung

$$\dot{J}_p(\sigma_p, t-\tau) = \frac{\dot{\varphi}_p(\sigma_p, t-\tau)}{E_p} \quad (3.2-4)$$

folgt. Im Unterschied zum Beton ist der Spannstahl als alterungsunabhängiges Material anzusehen. Aufgrund der Spannungsabhängigkeit der Kriechfunktion kann das Langzeitverhalten, wie in Abschnitt 2.4.3 begründet, durch eine Materialgleichung vom Differentialtyp besser erfaßt werden. Die Formulierung Gl.(3.2-2) hat zudem den Vorteil, daß bei der Berechnung Betonstahl und Spannstahl in gleicher Weise behandelt werden.

Im Unterschied zu der in der Literatur häufigeren Vorgehensweise das zeitabhängige Spannstahlverhalten durch eine Relaxationszahl [3.6], [3.7], [3.8] zu erfassen, ist im vorliegenden Fall die Definition einer Kriechzahl notwendig. *Blessenohl* [3.9] gibt für die Berechnung der Kriechzahl $\varphi_p(\sigma_p, t - \tau)$ die Näherungsbeziehung

$$\varphi_p(\sigma_p, t - \tau) = \left[\frac{\sigma_p}{f_{pk}} \right]^n \cdot a \cdot \ln(t - \tau + 1) \quad (3.2-5)$$

an, deren Ergebnisse, verglichen mit den Angaben aus den Spannstahlzulassungen bzw. dem EC2, für eine Belastungsdauer von $t - \tau = 1 \text{ d} \dots 30 \text{ Jahre}$ eine relativ gute Näherung darstellen. Durch die Parameter n und a wird das unterschiedliche Relaxationsverhalten verschiedener Spannstahlarten berücksichtigt, wobei

| | | |
|----------|-------------|--|
| $n = 4;$ | $a = 0.050$ | für Drähte mit hohen Relaxationsverlusten (Klasse 1) |
| $n = 6;$ | $a = 0.030$ | für Litzen mit niedrigen Relaxationsverlusten (Klasse 2) |
| $n = 4;$ | $a = 0.022$ | für Stäbe (Klasse 3) |

sind. Die angegebenen Spannstahlklassen 1..3 entsprechen dabei der Klassifizierung nach EC2.

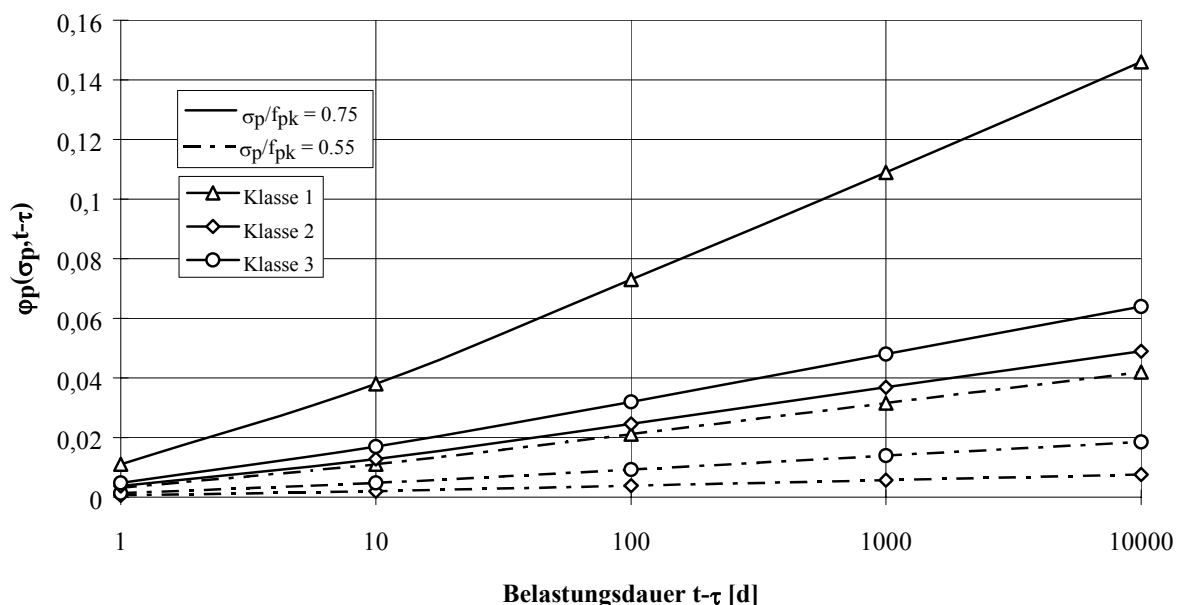


Abb.3.2-1: Darstellung der zeitlichen Kriechzahlentwicklung für den Spannstahl nach [3.9]

4 Numerische Behandlung ausgewählter Materialbeziehungen

4.1 Konstitutive Beziehungen und Wahl des Näherungsverfahrens

Aus Gründen der Übersichtlichkeit seien die für die weitere Arbeit maßgebenden konstitutiven Beziehungen für den Beton und den vorgespannten Stahl an dieser Stelle noch einmal aufgeführt, wobei die Auswahl auf Grundlage der in Kapitel 2 und 3 angestellten Überlegungen getroffen wurde. Die umfassendste Beschreibung des zeitabhängigen Materialverhaltens liefern demnach folgende Materialgleichungen:

$$\dot{\varepsilon}_c(t) = \frac{\dot{\sigma}_c(t)}{E_c(t)} - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_c(\tau) \frac{\partial \dot{J}_c(\sigma_c(t), t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \dot{\varepsilon}_{c,sh}(t) \quad (4.1-1)$$

$$\dot{\varepsilon}_p(t) = \frac{\dot{\sigma}_{p,\Delta}(t)}{E_p} - \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \sigma_p(\tau) \frac{\partial \dot{J}_p(\sigma_p(t), t - \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4.1-2)$$

Aus der Struktur der Gleichungen ist ersichtlich, daß unterschiedliche Materialien in gleicher Weise behandelt werden können. Dem Vorteil dieser Formulierung, das Materialverhalten auch im nichtlinearen Bereich relativ gut zu erfassen, steht der Nachteil des erheblich größeren Rechenaufwands gegenüber, der sich aus der nichtlinearen Abhängigkeit der Dehnungen vom aktuellen Spannungszustand ergibt.

Die Verformungsanteile, die den ideal plastischen Zustand beschreiben, können durch das in den nachfolgenden Kapiteln hergeleitete Berechnungsverfahren in sehr einfacher und effektiver Weise erfaßt werden, so daß die plastischen Verformungen in den Materialgleichungen nicht gesondert berücksichtigt werden müssen.

Eine getrennte Behandlung des linearen und nichtlinearen Kriechfalls ist prinzipiell nicht notwendig, da die linearen Beziehungen in den nichtlinearen Beziehungen als Sonderfall enthalten sind.

Wie schon in Kapitel 2.4.2 angedeutet, ist es aufgrund der von vornherein unbekannten zeitlichen Spannungsentwicklung notwendig, die Materialbeziehungen in algebraische Gleichungen zu überführen. Dabei kann prinzipiell zwischen zwei Vorgehensweisen unterschieden werden.

Bei der ersten Vorgehensweise, z.B. angewendet in [4.1] [4.2] [4.3] [4.4] [4.5], wird nach Zerlegung des Gesamtzeitraums in eine endliche Anzahl von Zeitintervallen die Änderung der Kriechdehnung in einem Zeitintervall berechnet, wobei die gesamte Spannungsgeschichte der vorangegangenen Zeitintervalle zu berücksichtigen ist. Aufgrund dessen werden diese Verfahren als *Verfahren mit Speicherung der Lastgeschichte (memory models)* bzw. wegen der notwendigen sukzessiven Vorgehensweise als *inkrementelle Methoden* oder *Mehrschrittverfahren* bezeichnet. Dabei ist anzumerken, daß die entstehenden Integrale über die Zeitintervalle durch algebraische Ausdrücke angenähert werden müssen. Diese Näherungen haben nur dann einen geringen Einfluß auf das Ergebnis, wenn die Intervalle genügend klein gewählt werden.

Numerisch weniger aufwendig sind die *Verfahren ohne Speicherung der Lastgeschichte (state models)*, auch als *Einschrittverfahren* bezeichnet. Zu ihnen zählen unter anderem die Lösungen der in Abschnitt 2.4.2 angegebenen Differentialgleichungen (*Rate of Creep (RC) Method*, *Improved Dischinger (ID) Method*), das *Verfahren mit wirksamen Elastizitätsmodul (Effective Modulus (EM) Method)* und das *Verfahren mit mittleren Spannungen (Mean Stress (MS) Method)*. Das *Verfahren mit Relaxationskennwert* nach Trost [4.6], das durch Bazant [4.7] dahingehend modifiziert wurde, daß der Relaxationskennwert und die Kriechzahl in einem alterungsabhängigen effektiven Modul zusammengefaßt sind (*Age Adjusted Effective Modulus (AAEM) Method*), ist aufgrund seiner relativ guten Beschreibung des Betonverhaltens das derzeit wohl am häufigsten verwendete Näherungsverfahren (z.B. in [4.8], [4.9], [4.10], [4.11]).

Unter der Voraussetzung, daß sich die Kriechfunktion durch eine Summe von Exponentialfunktionen approximieren läßt (*Dirichlet-Serie*), entwickelt Bazant [4.12] ein weiteres Verfahren, bei dem auf die Speicherung der gesamten Spannungsgeschichte verzichtet werden kann.

Vergleichende Untersuchungen bezüglich der numerischen Stabilität bzw. der Genauigkeit der Näherungsverfahren sind z.B. in [4.13], [4.14], [4.15], [4.16], [4.17] veröffentlicht. Dabei konnte festgestellt werden, daß die jeweils untersuchten Mehrschrittverfahren unabhängig von der Näherungsmethode gute Ergebnisse lieferten, wenn die Zeitintervalle ausreichend klein gewählt wurden. Ein weiterer Vorteil dieser Verfahren ist die Allgemeingültigkeit des Algorithmus, der auch bei geometrisch und physikalisch nichtlinearem Verhalten ohne weitere Probleme angewendet werden kann. Im Gegensatz dazu haben die Einschrittverfahren den Vorteil des einfacheren Algorithmus und des erheblich reduzierten Speicher- und Rechenaufwandes, der allerdings bei Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens, bei zeitlich unterschiedlichem Auftreten äußerer Lasten, bei Systemwechseln bzw. veränderlichen Kriech- und Schwindbedingungen teilweise oder ganz verlorengeht.

Nach Abwägung der eben genannten Vor- und Nachteile und weil derzeit keine Einschrittverfahren bekannt sind, mit denen das nichtlineare Kriechen berücksichtigt werden kann, wird in der vorliegenden Arbeit einer inkrementellen Vorgehensweise (*step by step method*) der Vorzug gegeben.

Die Anwendung dieses Verfahrens erfordert zunächst die Ersetzung der Integration über den Gesamtzeitraum $t_0 \dots t_k$ durch eine Summation über k Zeitintervalle $t_{i+1} - t_i$, wobei $i = 0 \dots k-1$ ist.

Bei der Festlegung der Intervallgrenzen ist zur Vermeidung größerer Ungenauigkeiten bzw. numerischer Instabilitäten die Intervallteilung an den Kurvenverlauf der Kriechdehnung anzupassen. Zusätzlich sind Unstetigkeitsstellen in der zeitlichen Spannungs- bzw. Dehnungsentwicklung als Zwangspunkte zu berücksichtigen. Solche Unstetigkeitsstellen sind zum Beispiel:

- 1) Zeitpunkte der Lasteintragung
- 2) Eintragen der Vorspannung
- 3) Änderung der Kriech- und Schwindbedingungen (Temperaturänderungen, Änderungen der relativen Luftfeuchtigkeit)
- 4) Änderung des statischen Systems bzw. der Querschnittswerte

Da die eben genannten Einflüsse zumeist zu einer sprunghaften Veränderung des Spannungs- bzw. Dehnungszustands führen, sollten diese Zeitpunkte doppelt belegt werden, d.h. daß dem Zustand kurz vor dem Auftreten der sprunghaften Spannungs- bzw. Dehnungsänderung eine andere Intervallgrenze zugeordnet wird als dem Zustand danach. Beide Intervallgrenzen haben jedoch denselben Wert, so daß die Intervalldauer zwischen diesen Grenzen gleich 0 ist. Weiterhin sollte der Zeitpunkt berücksichtigt werden, an dem der Beton seine geringste Druckfestigkeit (Dauerstandsfestigkeit) erreicht.

Unabhängig von den eben genannten Zwangspunkten wird im allgemeinen eine logarithmische Intervallteilung bevorzugt, da aufgrund des steileren Anstiegs der Kriechkurven bei Kriechbeginn mehr Stützstellen für eine relativ genaue Beschreibung des Kriechprozesses im Anfangsbereich notwendig sind. Für die mindestens notwendige Intervallanzahl werden in der Literatur lediglich Orientierungswerte für den Bereich des linearen Kriechens angegeben. Aus diesem Grund werden im Rahmen der Arbeit eigene Untersuchungen für den linearen und nichtlinearen Kriechbereich durchgeführt (Abschn. 4.3).

4.2 Diskretisierung der Materialbeziehungen

Die Diskretisierung der konstitutiven Beziehungen mit Hilfe des Differenzenverfahrens (step by step method) wird an dieser Stelle ausführlich an der Materialbeziehung des Betons durchgeführt. Für die näherungsweise Beschreibung des Spannstahlverhaltens werden nur die wichtigsten Teilschritte angegeben, da die Verfahrensweise prinzipiell die gleiche ist.

1) Beton

Nach Zerlegung des Gesamtzeitraums in einzelne Zeitintervalle kann die Beziehung für die Dehngeschwindigkeit in der Form

$$\dot{\varepsilon}_c(t_k) = \frac{\dot{\sigma}_c(t_k)}{E_c(t_k)} - \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\tau=t_i}^{\tau=t_{i+1}} \sigma_c(\tau) \frac{\partial \dot{J}_c(\sigma_c(t_k), t_k, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \dot{\varepsilon}_{c,sh}(t_k) \quad (4.2-1)$$

angegeben werden. Durch die Berücksichtigung der unter Abschnitt 4.1 genannten Zwangspunkte als Intervallgrenzen ist die Stetigkeit der Spannungsfunktion $\sigma_c(\tau)$ in jedem Teilintervall gewährleistet. Da die mit $\sigma_c(\tau)$ durch Multiplikation verknüpfte Funktion $\partial \dot{J}_c / \partial \tau$ im Intervall das Vorzeichen nicht wechselt, kann der Integralausdruck mit Hilfe des *verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Integralrechnung* äquivalent umgeformt werden. Der verallgemeinerte Mittelwertsatz besagt, daß für das Integral des Produkts zweier Funktionen im Inneren des Integrationsintervalls $[a, b]$ wenigstens eine Zahl ξ existiert, so daß gilt:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x) dx = u(\xi) \cdot \int_a^b v(x) dx \quad a \leq \xi \leq b. \quad (4.2-2)$$

Nach Anwendung des Mittelwertsatzes auf Gl.(4.2-1) kann für die zeitabhängige Materialbeziehung geschrieben werden:

$$\dot{\varepsilon}_c(t_k) = \frac{\dot{\sigma}_c(t_k)}{E_c(t_k)} - \sum_{i=0}^{k-1} \sigma_c(t_i + \theta_i) \int_{\tau=t_i}^{\tau=t_{i+1}} \frac{\partial J_c(\sigma_c(t_k), t_k, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \dot{\varepsilon}_{c,sh}(t_k), \quad (4.2-3)$$

wobei der Ausdruck $(t_i + \theta_i)$ zwischen t_i und t_{i+1} liegen muß. In der vorliegenden Form ist eine einfache Auflösung des Integralausdrucks möglich. Unter Berücksichtigung der Intervall-grenzen ergibt sich:

$$\dot{\varepsilon}_c(t_k) = \frac{\dot{\sigma}_c(t_k)}{E_c(t_k)} - \sum_{i=0}^{k-1} \sigma_c(t_i + \theta_i) [J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_{i+1}) - J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_i)] + \dot{\varepsilon}_{c,sh}(t_k). \quad (4.2-4)$$

Unter der Voraussetzung, daß für θ_i der wirklich vorhandene Wert eingesetzt wird, entspricht Gl.(4.2-4) der exakten Lösung. Da jedoch die Werte θ_i im allgemeinen von vornherein nicht bekannt sind, wird hier auf die Näherung zurückgegriffen, daß sich $\sigma_c(t_i + \theta_i)$ aus dem Mittelwert der Spannungen an den Intervallgrenzen ergibt.

$$\sigma_c(t_i + \theta_i) = \frac{\sigma_c(t_i) + \sigma_c(t_{i+1})}{2} \quad (4.2-5)$$

Zur Berechnung der Dehnungsänderung in einem finiten Zeitintervall ist es notwendig, die Differentialausdrücke durch Differenzenausdrücke zu ersetzen. Dabei wird näherungsweise von einer linearen Abhängigkeit zwischen den sich ändernden Größen und der Zeit in dem jeweiligen Intervall ausgegangen.

$$\dot{\varepsilon}_c(t_k) = \frac{\varepsilon_c(t_k) - \varepsilon_c(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \quad (4.2-6)$$

$$\dot{\sigma}_c(t_k) = \frac{\sigma_c(t_k) - \sigma_c(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \quad (4.2-7)$$

Bei der näherungsweisen Beschreibung der nach t differenzierten nichtlinearen Kriechfunktion sind die Gln.(2.4.3-14,15) zu beachten, wonach die von der aktuellen Spannung abhängige Funktion nicht nach t abgeleitet werden darf, so daß gilt:

$$J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_i) = \frac{J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_i) - J_c(\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_i)}{t_k - t_{k-1}}, \quad (4.2-8)$$

$$J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_k) = \frac{J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_k) - J_c(\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}.$$

Nach Einsetzen der Näherungsbeziehungen Gln.(4.2-5..8) in Gl.(4.2-4) und Auflösen nach $\varepsilon_c(t_k)$ erhält man die Beziehung für die zeitabhängige Gesamtdehnung des Betons in diskretisierter Form.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_c(t_k) = & \varepsilon_c(t_{k-1}) + \frac{\sigma_c(t_k) - \sigma_c(t_{k-1})}{E_c(t_k)} - \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\sigma_c(t_i) + \sigma_c(t_{i+1})}{2} \cdot [J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_{i+1}) - \\
& J_c(\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{i+1}) - J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_i) + J_c(\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_i)] - \\
& \frac{\sigma_c(t_{k-1}) + \sigma_c(t_k)}{2} [J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_k) - J_c(\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{k-1}) - \\
& J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-1}) + J_c(\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{k-1})] + \varepsilon_{c,sh}(t_k) - \varepsilon_{c,sh}(t_{k-1})
\end{aligned} \quad (4.2-9)$$

Die Gesamtdehnung zum aktuellen Zeitpunkt t_k setzt sich damit aus der Gesamtdehnung des vorangegangenen Zeitpunkts und der Dehnungsänderung im aktuellen Zeitintervall zusammen, wobei die Dehnungsänderung von der gesamten vorangegangenen Lastgeschichte abhängig ist. Aus Gl.(4.2-9) folgt, daß bei der Betrachtung von Zeitpunkt t_0 die Ausdrücke $\varepsilon_c(t_{-1})$, $\sigma_c(t_{-1})$ und $\varepsilon_{c,sh}(t_{-1})$ initialisiert werden müssen.

$$\varepsilon_c(t_{-1}) = \varepsilon_{c,V} \quad \sigma_c(t_{-1}) = 0 \quad \varepsilon_{c,sh}(t_{-1}) = 0$$

Mit dem Ausdruck $\varepsilon_{c,V}$ kann die Vorverformung eines Betonanteils erfaßt werden, wenn z.B. nachträglich ergänzte Betonquerschnitte betrachtet werden sollen. Die spannungsabhängige Kriechfunktion läßt sich durch die Beziehung (siehe Abschnitt 2.4.3)

$$J_c(\sigma_c(t_k), t_k, t_i) = \frac{1}{E_c(t_i)} + F[\sigma_c(t_k), t_k, t_i] \cdot C_c(t_k, t_i), \quad (4.2-10)$$

bzw.

$$J_c(\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_i) = \frac{1}{E_c(t_i)} + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_i] \cdot C_c(t_{k-1}, t_i)$$

ersetzen, wobei der Kriechzahlerhöhungsfaktor prinzipiell vom aktuellen Spannungsniveau abhängig ist. Die zusätzliche Abhängigkeit des Kriechzahlerhöhungsfaktors von den Zeitpunkten t_{k-1} und t_i bezieht sich auf die Funktion $f(t, \tau)$ in Gl.(2.4.3-11), die den Einfluß der Belastungsdauer auf das nichtlineare Kriechen beschreibt. Für Gl.(4.2-9) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_c(t_k) = & \varepsilon_c(t_{k-1}) + \frac{\sigma_c(t_k) - \sigma_c(t_{k-1})}{E_c(t_k)} - \\
& \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\sigma_c(t_i) + \sigma_c(t_{i+1})}{2} [F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{i+1}] \cdot C_c(t_k, t_{i+1}) - F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{i+1}] \cdot C_c(t_{k-1}, t_{i+1}) - \\
& F[\sigma_c(t_k), t_k, t_i] \cdot C_c(t_k, t_i) + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_i] \cdot C_c(t_{k-1}, t_i)] - \\
& \frac{\sigma_c(t_{k-1}) + \sigma_c(t_k)}{2} [F[\sigma_c(t_k), t_k, t_k] \cdot C_c(t_k, t_k) - F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{k-1}] \cdot C_c(t_{k-1}, t_{k-1}) - \\
& F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-1}] \cdot C_c(t_k, t_{k-1}) + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{k-1}] \cdot C_c(t_{k-1}, t_{k-1})] + \\
& \varepsilon_{c,sh}(t_k) - \varepsilon_{c,sh}(t_{k-1})
\end{aligned} \quad (4.2-11)$$

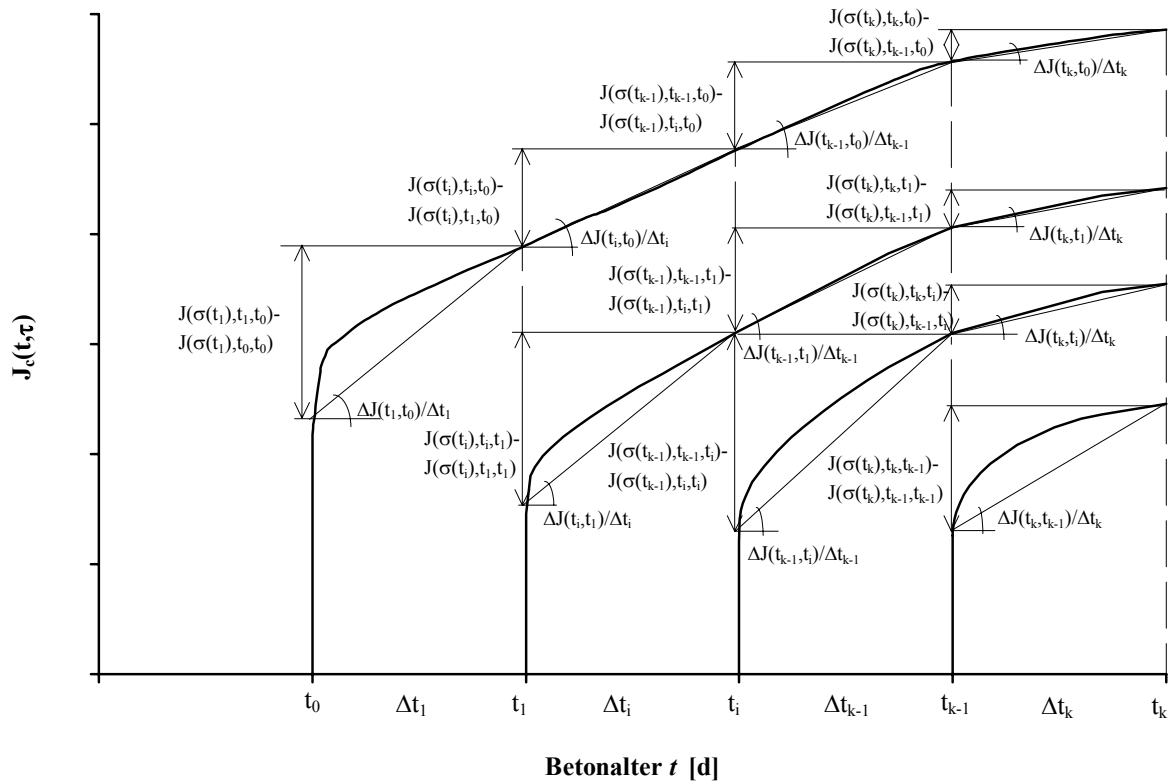
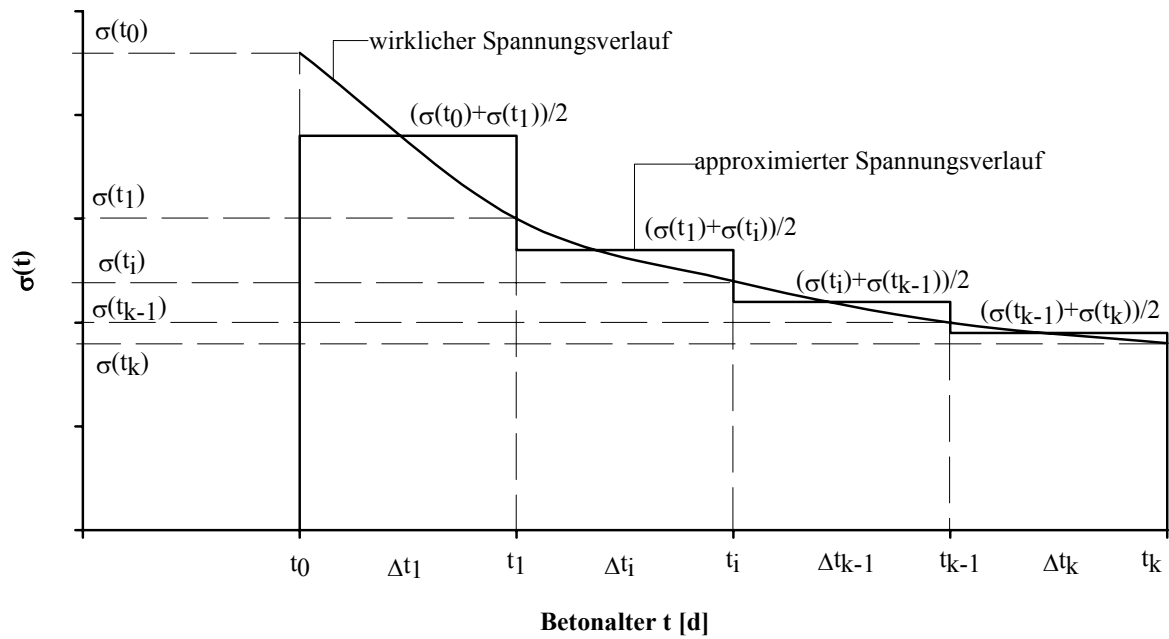


Abb.4.2-1: Näherungsweise Beschreibung des zeitabhängigen Verlaufs der Spannungen und der Kriechfunktion bei differentieller Formulierung des Materialgesetzes

Nach Ausschreiben des Summenausdrucks erhält man die Beziehung:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_c(t_k) = & \varepsilon_c(t_{k-1}) + \frac{\sigma_c(t_k) - \sigma_c(t_{k-1})}{E_c(t_k)} - \\
& \frac{\sigma_c(t_0) + \sigma_c(t_1)}{2} \left(F[\sigma_c(t_k), t_k, t_1] C_c(t_k, t_1) - F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_1] C_c(t_{k-1}, t_1) - \right. \\
& \quad \left. F[\sigma_c(t_k), t_k, t_0] C_c(t_k, t_0) + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_0] C_c(t_{k-1}, t_0) \right) - \\
& \frac{\sigma_c(t_1) + \sigma_c(t_2)}{2} \left(F[\sigma_c(t_k), t_k, t_2] C_c(t_k, t_2) - F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_2] C_c(t_{k-1}, t_2) - \right. \\
& \quad \left. F[\sigma_c(t_k), t_k, t_1] C_c(t_k, t_1) + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_1] C_c(t_{k-1}, t_1) \right) - \\
& \quad \vdots \\
& \frac{\sigma_c(t_i) + \sigma_c(t_{i+1})}{2} \left(F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{i+1}] C_c(t_k, t_{i+1}) - F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{i+1}] C_c(t_{k-1}, t_{i+1}) - \right. \\
& \quad \left. F[\sigma_c(t_k), t_k, t_i] C_c(t_k, t_i) + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_i] C_c(t_{k-1}, t_i) \right) - \\
& \quad \vdots \\
& \frac{\sigma_c(t_{k-2}) + \sigma_c(t_{k-1})}{2} \left(F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-1}] C_c(t_k, t_{k-1}) - \right. \\
& \quad \left. F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-2}] C_c(t_k, t_{k-2}) + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{k-2}] C_c(t_{k-1}, t_{k-2}) \right) + \\
& \frac{\sigma_c(t_{k-1}) + \sigma_c(t_k)}{2} F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-1}] C_c(t_k, t_{k-1}) + \varepsilon_{c,sh}(t_k) - \varepsilon_{c,sh}(t_{k-1})
\end{aligned} \tag{4.2-12}$$

wobei die Kriechmaße $C_c(t_k, t_k)$ und $C_c(t_{k-1}, t_{k-1})$ von vornherein eliminiert werden, da sie aufgrund identischer Belastungs- und Betrachtungszeitpunkte den Wert Null annehmen. Nach Zusammenfassen der Spannungen $\sigma_c(t_i)$ und Erweiterung einiger Ausdrücke mit dem zum jeweiligen Zeitpunkt vorhandenen Elastizitätsmodul $E_c(t_i)$ ergibt sich unter Verwendung des Summenzeichens:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_c(t_k) = & \varepsilon_c(t_{k-1}) + \frac{\sigma_c(t_k)}{E_c(t_k)} \left[1 + \frac{E_c(t_k)}{2} F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-1}] C_c(t_k, t_{k-1}) \right] - \\
& \frac{\sigma_c(t_{k-1}) E_c(t_{k-1})}{E_c(t_{k-1}) E_c(t_k)} \left[1 + \frac{E_c(t_k)}{2} \left(F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{k-2}] C_c(t_{k-1}, t_{k-2}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-2}] C_c(t_k, t_{k-2}) \right) \right] - \\
& \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\sigma_c(t_i) E_c(t_i)}{2 E_c(t_i)} \cdot \left(F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{i+1}] C_c(t_k, t_{i+1}) - F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{i+1}] C_c(t_{k-1}, t_{i+1}) - \right. \\
& \quad \left. F[\sigma_c(t_k), t_k, t_{i-1}] C_c(t_k, t_{i-1}) + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{i-1}] C_c(t_{k-1}, t_{i-1}) \right) - \\
& \frac{\sigma_c(t_0) E_c(t_0)}{2 E_c(t_0)} \left(F[\sigma_c(t_k), t_k, t_1] C_c(t_k, t_1) - F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_1] C_c(t_{k-1}, t_1) - \right. \\
& \quad \left. F[\sigma_c(t_k), t_k, t_0] C_c(t_k, t_0) + F[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_0] C_c(t_{k-1}, t_0) \right) + \\
& \varepsilon_{c,sh}(t_k) - \varepsilon_{c,sh}(t_{k-1})
\end{aligned} \tag{4.2-13}$$

Zur Übersicht werden in Tafel 4.2-1 folgende Hilfswerte definiert:

| |
|---|
| für $t_k = t_0$: |
| $\Phi_{k,k}^c = 0,$ $\Psi_k^c = 0,$ |
| für $t_k > t_0$: |
| $\Phi_{k,0}^c = 0.5 \cdot E_c(t_0) \cdot \left(\mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_k, t_0] C_c(t_k, t_0) - \mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_0] C_c(t_{k-1}, t_0) - \right.$ $\left. \mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_k, t_1] C_c(t_k, t_1) - \mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_1] C_c(t_{k-1}, t_1) \right),$ |
| $\Phi_{k,i}^c = 0.5 \cdot E_c(t_i) \cdot \left(\mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_k, t_{i-1}] C_c(t_k, t_{i-1}) - \mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{i-1}] C_c(t_{k-1}, t_{i-1}) - \right.$ $\left. \mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_k, t_{i+1}] C_c(t_k, t_{i+1}) - \mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{i+1}] C_c(t_{k-1}, t_{i+1}) \right),$ |
| $\Phi_{k,k-1}^c = 0.5 \cdot E_c(t_{k-1}) \cdot \left(\mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-2}] C_c(t_k, t_{k-2}) - \right.$ $\left. \mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_{k-1}, t_{k-2}] C_c(t_{k-1}, t_{k-2}) \right),$ |
| $\Phi_{k,k}^c = 1 + 0.5 \cdot E_c(t_k) \cdot \mathbf{F}[\sigma_c(t_k), t_k, t_{k-1}] C_c(t_k, t_{k-1}),$ |
| $\Psi_k^c = \frac{E_c(t_{k-1})}{E_c(t_k)}.$ |

Tafel 4.2-1: Hilfswerte $\Phi_{k,i}^c$ und Ψ_k^c zur Beschreibung des zeitabhängigen Betonverhaltens auf Grundlage der differentiellen Formulierung

Nach Einsetzen der Hilfswerte in die Gl.(4.2-13) ergibt sich:

$$\varepsilon_c(t_k) = \frac{\sigma_c(t_k) \Phi_{k,k}^c}{E_c(t_k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\sigma_c(t_i)}{E_c(t_i)} \Phi_{k,i}^c \right) - \frac{\sigma_c(t_{k-1})}{E_c(t_{k-1})} \cdot \Psi_k^c + \varepsilon_c(t_{k-1}) + \varepsilon_{c,sh}(t_k) - \varepsilon_{c,sh}(t_{k-1}) \quad (4.2-14)$$

Durch Zusammenfassen der letzten vier Anteile zu $\varepsilon_{c,v}(t_k)$ kann Gl.(4.2-14) ersetzt werden durch:

$$\varepsilon_c(t_k) = \frac{\sigma_c(t_k) \Phi_{k,k}^c}{E_c(t_k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\sigma_c(t_i)}{E_c(t_i)} \Phi_{k,i}^c \right) + \varepsilon_{c,v}(t_k). \quad (4.2-15)$$

2) Spannstahl

Aufgrund der gleichartigen Struktur kann die Diskretisierung der zeitabhängigen Materialbeziehung des Spannstahls in gleicher Weise wie beim Beton erfolgen. Nach Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Integralrechnung und Ersetzen der Differentialquotienten durch finite Differenzen lautet die konstitutive Beziehung des Spannstahls in diskretisierter Form:

$$\varepsilon_p(t_k) = \varepsilon_p(t_{k-1}) + \frac{\sigma_p(t_k) - \sigma_p(t_{k-1})}{E_p} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sigma_p(t_i) + \sigma_p(t_{i+1})}{2} \cdot [J_p(\sigma_p(t_k), t_k - t_{i+1}) - J_p(\sigma_p(t_k), t_{k-1} - t_{i+1}) - J_p(\sigma_p(t_k), t_k - t_i) + J_p(\sigma_p(t_k), t_{k-1} - t_i)] \quad (4.2-16)$$

Zum Zeitpunkt t_0 ist, analog zur Vorgehensweise beim Beton, der Ausdruck $\sigma_p(t_{-1})$ mit dem Anfangswert 0 zu belegen, der Ausdruck $\varepsilon_p(t_{-1})$ kann als Vordehnung des Spannstahls $\varepsilon_{p,V}$ aufgefaßt werden kann.

Wegen des über den Zeitraum konstanten Elastizitätsmoduls kann für die spannungsabhängige Kriechfunktion geschrieben werden:

$$J_p(\sigma_p(t_k), t_k - t_i) = \frac{1}{E_p} [1 + F[\sigma_p(t_k)] \varphi_p(t_k - t_i)], \quad (4.2-17)$$

wobei sich die spannungsabhängige Funktion $F[\sigma_p(t_k)]$ und die Verlaufsfunktion $\varphi_p(t_k - t_i)$ aus den Beziehungen analog Abschn. 3.2 ergeben:

$$F[\sigma_p(t_k)] = \left(\frac{\sigma_p(t_k)}{f_{pk}} \right)^n, \quad (4.2-18)$$

$$\varphi_p(t_k - t_i) = a \cdot \ln(t_k - t_i + 1). \quad (4.2-19)$$

Durch Einsetzen von Gl.(4.2-17) in Gl.(4.2-16) ergibt sich:

$$\varepsilon_p(t_k) = \varepsilon_p(t_{k-1}) + \frac{\sigma_p(t_k) - \sigma_p(t_{k-1})}{E_p} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sigma_p(t_i) + \sigma_p(t_{i+1})}{2E_p} \cdot [F[\sigma_p(t_k)] (\varphi_p(t_k - t_{i+1}) - \varphi_p(t_{k-1} - t_{i+1}) - \varphi_p(t_k - t_i) + \varphi_p(t_{k-1} - t_i))] \quad (4.2-20)$$

woraus man nach Zusammenfassen der Spannungen die diskretisierte Materialgleichung in der Form von Gl.(4.2-13) erhält.

$$\begin{aligned} \varepsilon_p(t_k) = & \varepsilon_p(t_{k-1}) + \frac{\sigma_p(t_k)}{E_p} \left[1 + \frac{1}{2} F[\sigma_p(t_k)] \varphi_p(t_k - t_{k-1}) \right] - \\ & \frac{\sigma_p(t_{k-1})}{E_p} \left[1 + \frac{1}{2} F[\sigma_p(t_k)] (\varphi_p(t_{k-1} - t_{k-2}) - \varphi_p(t_k - t_{k-2})) \right] - \\ & \sum_{i=1}^{k-2} \frac{\sigma_p(t_i)}{2E_p} F[\sigma_p(t_k)] \cdot \\ & (\varphi_p(t_k - t_{i+1}) - \varphi_p(t_{k-1} - t_{i+1}) - \varphi_p(t_k - t_{i-1}) + \varphi_p(t_{k-1} - t_{i-1})) - \\ & \frac{\sigma_p(t_0)}{2E_p} F[\sigma_p(t_k)] \cdot (\varphi_p(t_k - t_1) - \varphi_p(t_{k-1} - t_1) - \varphi_p(t_k - t_0) + \varphi_p(t_{k-1} - t_0)) \end{aligned} \quad (4.2-21)$$

In Anlehnung an die Vorgehensweise bei der Diskretisierung der zeitabhängigen Materialbeziehung des Betons lassen sich folgende Hilfswerte definieren:

für $t_k = t_0$:

$$\Phi_{k,k}^p = 0, \quad \Psi_k^p = 0,$$

für $t_k > t_0$:

$$\Phi_{k,0}^p = 0.5 \cdot \mathbf{F}[\sigma_p(t_k)] \left(\varphi_p(t_k - t_0) - \varphi_p(t_{k-1} - t_0) - \varphi_p(t_k - t_1) + \varphi_p(t_{k-1} - t_1) \right),$$

$$\Phi_{k,i}^p = 0.5 \cdot \mathbf{F}[\sigma_p(t_k)] \left(\varphi_p(t_k - t_{i-1}) - \varphi_p(t_{k-1} - t_{i-1}) - \varphi_p(t_k - t_{i+1}) + \varphi_p(t_{k-1} - t_{i+1}) \right),$$

$$\Phi_{k,k-1}^p = 0.5 \cdot \mathbf{F}[\sigma_p(t_k)] \left(\varphi_p(t_k - t_{k-2}) - \varphi_p(t_{k-1} - t_{k-2}) \right),$$

$$\Phi_{k,k}^p = 1 + 0.5 \cdot \mathbf{F}[\sigma_p(t_k)] \varphi_p(t_k - t_{k-1}),$$

$$\Psi_k^p = 1$$

Tafel 4.2-2: Hilfswerte $\Phi_{k,i}^c$ und Ψ_k^c zur Beschreibung des zeitabhängigen Verhaltens des vorgespannten Stahls auf Grundlage der differentiellen Formulierung

mit denen Gl.(4.2-21) in übersichtlicher Form wie folgt dargestellt werden kann:

$$\varepsilon_p(t_k) = \frac{\sigma_p(t_k) \Phi_{k,k}^p}{E_p} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\sigma_p(t_i)}{E_p} \Phi_{k,i}^p \right) - \frac{\sigma_p(t_{k-1})}{E_p} \Psi_k^p + \varepsilon_p(t_{k-1}). \quad (4.2-22)$$

Nach Zusammenfassen der letzten beiden Glieder der Gleichung durch die Variable $\varepsilon_{p,v}(t_k)$ lautet die angenäherte konstitutive Beziehung für den Spannstahl:

$$\varepsilon_p(t_k) = \frac{\sigma_p(t_k) \Phi_{k,k}^p}{E_p} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\sigma_p(t_i)}{E_p} \Phi_{k,i}^p \right) + \varepsilon_{p,v}(t_k). \quad (4.2-23)$$

Aufgrund der gleichartigen Struktur der in diesem Abschnitt diskretisierten konstitutiven Beziehungen läßt sich eine für beide Materialien gültige Materialgleichung aufstellen, wobei im Einzelfall lediglich die Hilfswerte $\Phi_{k,i}$ und $\Psi_{k,i}$ angepaßt werden müssen.

$$\varepsilon(t_k) = \frac{\sigma(t_k) \Phi_{k,k}}{E(t_k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{\sigma(t_i)}{E(t_i)} \Phi_{k,i} \right) + \varepsilon_v(t_k) \quad (4.2-24)$$

Diese Beziehung stellt die Grundlage für für das in den nachfolgenden Kapiteln hergeleitete Berechnungsmodell dar.

4.3 Einfluß der Intervallanzahl auf die Berechnungsergebnisse

Wie schon in Abschnitt 4.1 erwähnt sind die in der Fachliteratur getroffenen Aussagen über die zur Erzielung ausreichend genauer Berechnungsergebnisse notwendige Intervallteilung auf den Bereich des linearen Kriechens beschränkt. Dabei wird relativ übereinstimmend festgestellt, daß bereits eine Anzahl von 6 Zeitintervallen in einem Zeitraum von 10000 Tagen eine für baupraktische Belange ausreichende Genauigkeit liefert [4.13], [4.18], [4.19]. *Bazant* [4.19] schlägt außerdem eine Anzahl von 24 Intervallen für exakte Berechnungen vor. Aus den in [4.17] veröffentlichten Untersuchungen von *Kawano et al.* läßt sich ableiten, daß für Mehrschrittverfahren, bei denen der reale Spannungsverlauf analog zur vorliegenden Arbeit durch einen intervallweise konstanten Spannungsverlauf approximiert wird, eine Anzahl von 12 Intervallen eine relativ gute Genauigkeit liefert.

Um einschätzen zu können, inwieweit diese Ergebnisse auf den Fall des nichtlinearen Kriechens übertragbar sind, werden im Rahmen der Arbeit Berechnungen zum Einfluß der Intervallanzahl auf die Ergebnissenauigkeit für den Fall des linearen und des nichtlinearen Kriechens durchgeführt. Der Gesamtzeitraum wird dabei in 6, 11 und 21 Teilintervalle zerlegt, wobei die Intervallteilung so gewählt wird, daß die Intervalllänge auf dem logarithmischen Zeitmaßstab konstant ist. Als lineare Kriechfunktion dient der Vorschlag nach EC2, die Nichtlinearität unter hoher Spannung wird durch den Kriechzahlerhöhungsfaktor nach Gl.(2.4.3-11) berücksichtigt. Es ist noch anzumerken, daß die Ergebnisse von der verwendeten Kriechfunktion abhängig sind. Die Abweichungen bezüglich des Einflusses der Diskretisierungsgenauigkeit dürften jedoch im Regelfall geringfügig sein. Analog zu [4.17] werden drei verschiedene Belastungsgeschichten untersucht.

Bei über den Zeitraum konstanter Spannung unter der Voraussetzung des linearen Kriechens hat die Intervallteilung erwartungsgemäß keinen Einfluß auf die Ergebnisse, da in diesem Sonderfall der Mittelwertsatz der Integralrechnung die exakte Lösung des Problems liefert. Die für den Fall des nichtlinearen Kriechens ermittelten Abweichungen resultieren aus der Abhängigkeit des Kriechzahlerhöhungsfaktors von der Belastungsdauer. Aufgrund der größeren Intervalllänge bei abnehmender Intervallanzahl wird der für kurze Belastungsdauern größere Kriechzahlerhöhungsfaktor auf einen längeren Zeitraum bezogen, so daß die Kriechdeformationen geringfügig überbewertet werden.

Da der Belastungsfall „zeitlich konstante Spannung“ in Stahlbeton- und Spannbetonkonstruktionen im Prinzip nicht auftritt, haben die Ergebnisse der anderen beiden Belastungsgeschichten eine größere Aussagekraft. Der Belastungsfall „zeitlich anwachsende Belastung“ entsteht z.B. bei ausmittig beanspruchten Stahlbetondruckgliedern, wenn die Betondruckspannungen infolge der zeitabhängigen Zusatzmomente nach Theorie II.Ordnung schneller zunehmen als die Spannungsumlagerung vom Beton auf den Stahl erfolgt. Der Anstieg der Belastung wird als linear im logarithmischen Zeitmaßstab angenommen. Bei dieser Belastungsart sind erst ab dem Zeitpunkt, an dem die Last vollständig aufgebracht ist, erwähnenswerte Abweichungen bei der gröbsten Intervallteilung und nichtlinearem Kriechen zu erkennen. Dabei ist anzumerken, daß im Gegensatz zum linearen Kriechen die Kriechdeformationen bei sinkender Intervallanzahl überschätzt werden. Bei einer Erhöhung der Intervallanzahl von 11 auf 21 läßt sich nur noch eine geringfügige Verbesserung der Ergebnisse erzielen.

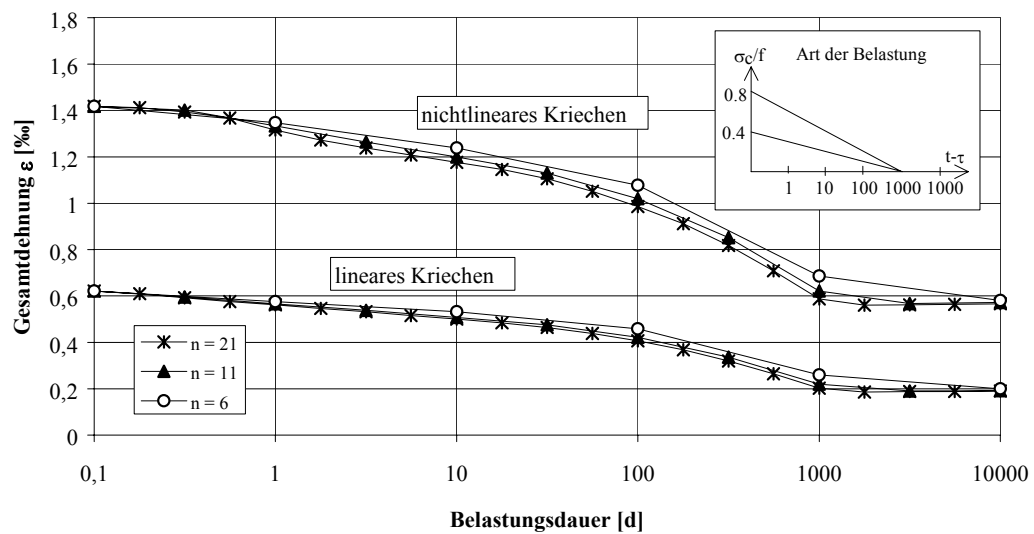
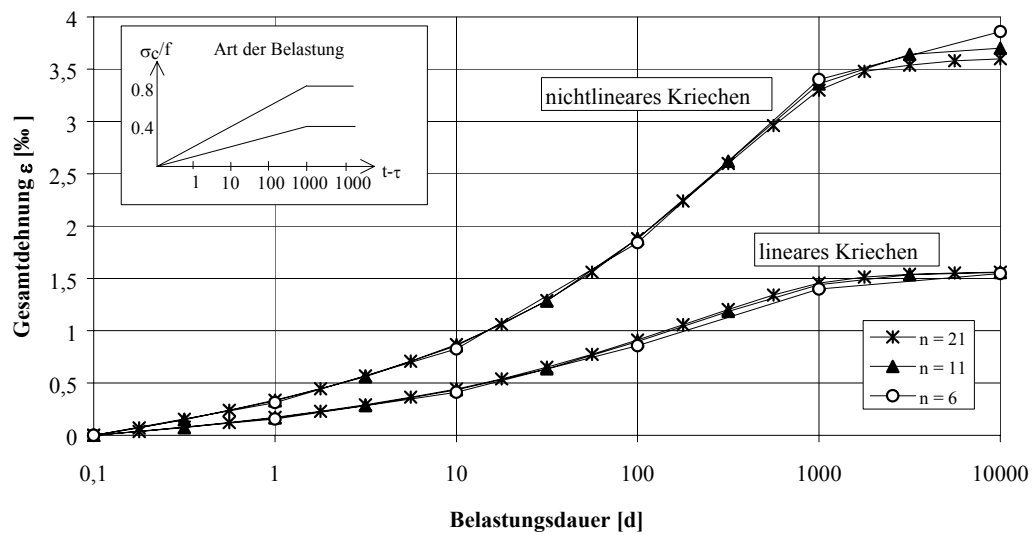
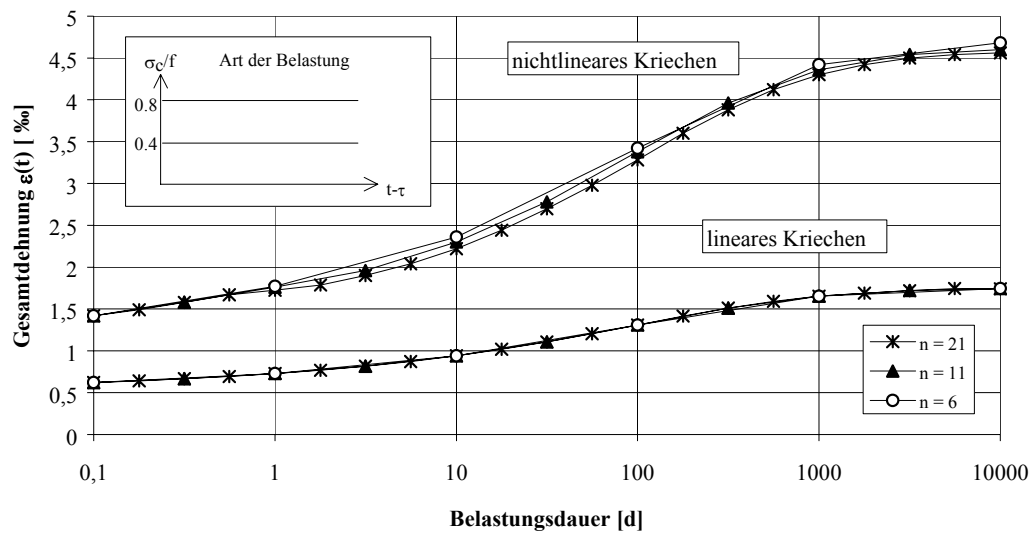


Abb. 4.3-1: Einfluß der Intervallanzahl auf die Ergebnisgenauigkeit bei verschiedenen Belastungsarten

Der Belastungsfall „zeitlich abnehmende Spannung“ stellt den Regelfall bei der Berechnung der Spannungsumlagerungen in Stahlbeton- und Spannbetonkonstruktionen dar. Für diese Art der Belastung sind die Unterschiede für die untersuchten Intervallteilungen am größten. Bei dem Vergleich der Ergebnisse der Berechnungen mit 6 und mit 21 Zeitschritten ergeben sich zum Teil Dehnungsunterschiede bis zu 14%. Durch die Erhöhung der Intervallanzahl von 6 auf 11 Zeitintervalle konnte die maximale Abweichung auf etwa 5% reduziert werden.

Abschließend kann eingeschätzt werden, daß die in der Literatur angegebenen Werte bezüglich der notwendigen Intervallanzahl offensichtlich auf den Fall des nichtlinearen Kriechens übertragen werden können. Für die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Berechnungen werden in Anlehnung an diese Untersuchung mindestens 9 Zeitintervalle zugrunde gelegt. Dies erscheint auf Grund des Sachverhalts gerechtfertigt, daß schon eine Teilung von 6 Intervallen gute Ergebnisse liefert und die Wirklichkeitsnähe der Ergebnisse in weitaus größerem Maße von der verwendeten Kriechfunktion und den angenommenen Materialparametern als von der Diskretisierungsgenauigkeit abhängt.

5 Berechnungsmodell für Bauteile mit zeitabhängigem Materialverhalten

5.1 Auswirkungen des zeitabhängigen Materialverhaltens auf Stahlbeton- und Spannbetontragwerke

Aus der Inhomogenität des Verbundbaustoffs Stahlbeton bzw. Spannbeton resultiert eine wesentliche Zunahme der Komplexität der unter Dauerbelastung ablaufenden Prozesse im Vergleich zu einer getrennten Betrachtung der einzelnen Komponenten Beton und Stahl. Das unterschiedliche zeitliche Materialverhalten des Betons und des Stahls beeinflusst die Spannungsverteilung im Verbundquerschnitt und im Fall statisch unbestimmter Lagerung bzw. bei Auftreten geometrisch nichtlinearer Effekte die Schnittgrößenverteilung des Gesamtsystems.

In Tafel 5.1-1 sind Auswirkungen des zeitabhängigen Materialverhaltens auf Stahlbeton- und Spannbetonelemente graphisch zusammengefaßt.

Im Querschnitt bewirkt das Kriechen des Betons ein Anwachsen der sich zum Zeitpunkt der Lastaufbringung unmittelbar einstellenden Deformationen des Gesamtquerschnitts. Durch den Verbund zwischen Stahl und Beton wird die Kompatibilität der Stahldehnungen zu den Deformationen des Gesamtquerschnitts zu jedem Zeitpunkt erzwungen, so daß die Stahldehnungen korrespondierend zu den größer werdenden Querschnittsverformungen in Abhängigkeit von der Nulllinienlage anwachsen. Aufgrund des rein elastischen Verhaltens des Bewehrungsstahls bzw. wegen der wesentlich geringeren zeitabhängigen Verformungen des Spannstahls resultieren aus den erzwungenen Stahldehnungen zusätzliche Stahlspannungen, die in der Zugzone positiv und in der Druckzone negativ sind.

Bei in der Druckzone liegenden Spanngliedern ergibt sich, daß wegen der abnehmenden Vordehnung ein Verlust der Vorspannung eintritt. Dieser Effekt wird durch die Relaxation des Spannstahls verstärkt. Durch die gleichzeitige Abnahme der Betondruckspannungen wird die Aufrechterhaltung des Gleichgewichtszustandes zwischen den Schnittgrößenanteilen und den Schnittgrößen des Gesamtquerschnitts gewährleistet, es kommt zu einer Spannungsumlagerung vom Beton auf den Stahl. Bei sehr hoher Auslastung des Betonquerschnitts nimmt der zeitliche Zuwachs der Kriechdehnungen aufgrund der Spannungsabhängigkeit des Kriechens mit wachsendem Nulllinienabstand zu. Aus den sich dadurch einstellenden zusätzlichen Spannungsumlagerungen innerhalb der Betondruckzone resultiert eine nichtlineare Betonspannungsverteilung über den Querschnitt.

Ein weiterer zu berücksichtigender nichtlinearer Effekt ergibt sich aus der Rißbildung des Betons in der Zugzone. Durch das Kriechen des Betons ist die Lage der Nulllinie und damit die Rißtiefe einer ständigen Veränderung unterworfen. Infolgedessen ist die Größe des Betonquerschnitts, der sich an der Lastabtragung beteiligt, zeitlich veränderlich und von vornherein nicht bekannt. Aus der beschriebenen zeitlichen Entwicklung der Spannungen im Stahl und Beton und der einzuhaltenden Momentengleichgewichtsbedingung folgt, daß durch das Kriechen eine Abnahme der Rißtiefe und eine Zunahme der Rißbreite hervorgerufen wird.

Das gleichmäßige Schwinden des Betons erzeugt eine konstante Stauchung des Querschnitts, aus der ein Eigenspannungszustand mit Druckspannungen im Stahl und Zugspannungen im Beton resultiert. Bei gleichzeitiger Momentenbeanspruchung überschreiten die zusätzlichen Zugspannungen in unmittelbarer Nähe der Nulllinie die Betonzugfestigkeit, so daß sich der

Riß in Richtung des Druckrandes weiterentwickelt. Mit dem anwachsenden Hebelarm der inneren Kräfte ist zur Aufnahme des Momentes eine geringere Stahlzugkraft notwendig. Die Zugspannungen im Stahl nehmen deswegen infolge des Betonschwindens ab.

Die hier im einzelnen beschriebenen Vorgänge beeinflussen sich gegenseitig, da sie zeitlich gemeinsam ablaufen. Eine Analyse der Spannungsentwicklung im Querschnitt ist deswegen unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens des Betons, der Spannstahlrelaxation sowie der Rißbildung des Betons in der Zugzone durchzuführen.

Durch das zeitabhängige Materialverhalten des Betons und des Spannstahls werden die Tragwerksverformungen zum Teil erheblich vergrößert. Dabei ist zu beachten, daß die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen wegen ihrer versteifenden Wirkung einen erheblichen Einfluß auf die Größe dieser Verformungen hat.

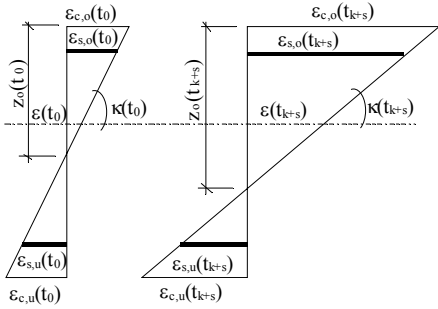
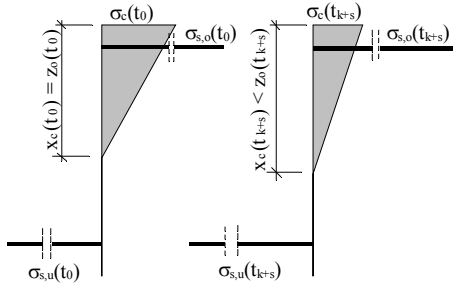
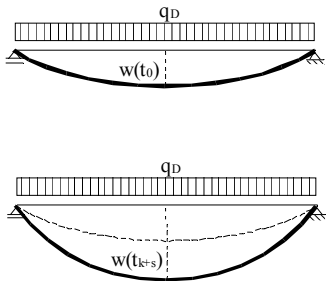
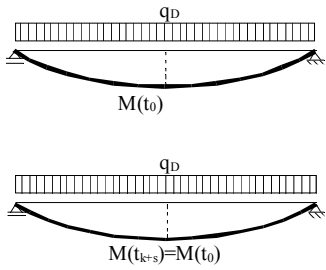
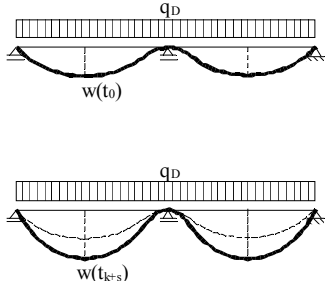
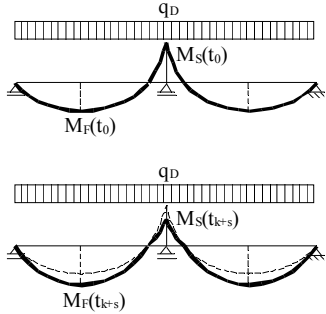
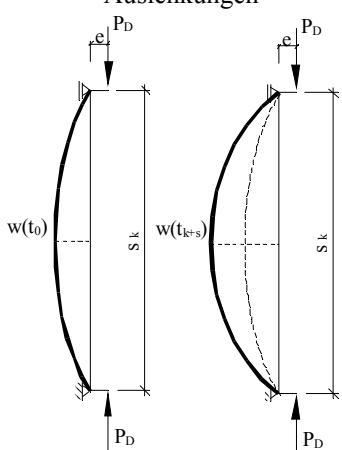
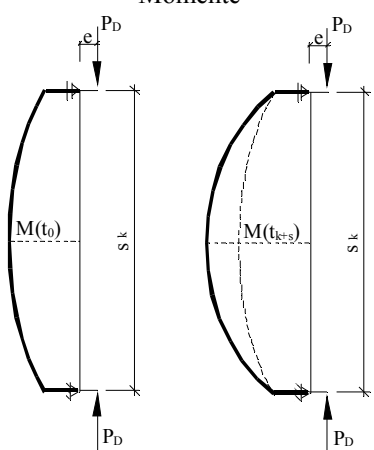
Aufgrund der unbehinderten Verformbarkeit bleibt der Schnittgrößenzustand statisch bestimmt gelagerter Tragwerke auch nach Ablauf des Kriechens und Schwindens unverändert, so daß durch das zeitabhängige Materialverhalten lediglich Eigenspannungszustände hervorgerufen werden.

Im Unterschied dazu werden durch die Behinderung der Langzeitverformungen bei statisch unbestimmten Systemen Zwangsschnittgrößen erzeugt. Infolge der von vornherein nicht bekannten Entwicklung der Zwangsschnittgrößen ist eine Analyse nur durch eine Betrachtung am Gesamtsystem möglich.

Das gleiche gilt für die Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Einflüsse. Da in diesem Fall die Schnittgrößen vom aktuellen Verformungszustand des Tragwerks abhängig sind, resultiert aus den krie- und schwindbedingten Zusatzausmittungen ein ständiger Momentenzuwachs. Dieser beeinflußt seinerseits die Größe der Kriechverformungen, weil durch ihn die elastischen Querschnittsdeformationen vergrößert werden. Aufgrund der ständigen Zunahme der Momentenbeanspruchung ist eine Vorhersage der zeitlichen Entwicklung der Betonspannungen in der Druckzone mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Die Betonspannungen nehmen ab, wenn die Spannungsumlagerungen vom Beton auf den Stahl schneller ablaufen als der zeitliche Zuwachs der verformungsbedingten Zusatzmomente. Der umgekehrte, für die Tragfähigkeit des Bauteils kritischere Fall führt auf eine Zunahme der Betonspannungen in der Druckzone.

Die Verformungen und die Tragfähigkeit stabilitätsgefährdeter Tragwerksteile werden außer durch das zeitabhängige Materialverhalten zusätzlich durch den Steifigkeitsabfall infolge Rißbildung des Betons erheblich beeinflusst. Mit anwachsenden Zusatzmomenten bilden sich neue Risse in zuvor ungerissenen Tragwerksbereichen bzw. bestehende Risse vergrößern sich, so daß die Steifigkeit des Gesamttragwerks mit zunehmender Belastungsdauer abfällt und ein zusätzlicher Verformungszuwachs hervorgerufen wird. Bei der Modellbildung ist zu beachten, daß das tatsächliche Tragverhalten durch eine Berechnung im „nackten“ Zustand II, d.h. keine Mitwirkung des Betons auf Zug, zu weich approximiert wird. Eine Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen ist demzufolge für eine wirklichkeitsnahe Beschreibung des Tragverhaltens zwingend erforderlich.

Aus der Beschreibung der Auswirkungen des zeitabhängigen Betonverhaltens auf Tragstrukturen aus Stahlbeton und Spannbeton wird deutlich, daß zur Berechnung der zeitlich veränderlichen Schnittgrößen, Spannungen und Deformationen ein umfangreicher mathema-

| Problem | Verformungsgrößen | Kraftgrößen |
|---|---|--|
| Kriechen und Schwinden im gerissenen Querschnitt | <p>Deformationen</p>  | <p>Spannungen</p>  |
| Kriechen und Schwinden statisch bestimmter Träger | <p>Durchbiegung</p>  | <p>Biegemomente</p>  |
| Kriechen und Schwinden statisch unbestimmter Träger | <p>Durchbiegung</p>  | <p>Biegemomente</p>  |
| Kriechen und Schwinden bei stabilitätsgefährdeten Bauteilen | <p>Auslenkungen</p>  | <p>Momente</p>  |

Tafel 5.1-1: Auswirkungen des Kriechens und Schwindens

tischer Apparat notwendig ist. In den nachfolgenden Abschnitten wird ein Berechnungsmodell für stabförmige Bauteile mit zeitabhängigem Materialverhalten hergeleitet, bei dem die Ermittlung der Schnittgrößen und Deformationen auf die sukzessive Lösung quadratischer Optimierungsaufgaben für im voraus festgelegte Betrachtungszeitpunkte zurückgeführt wird, wobei die Ergebnisse der vorangegangenen Zeitpunkte Eingangswerte für die Berechnung des jeweiligen aktuellen Zeitschritts darstellen. Die Berücksichtigung der Nichtlinearität des Kriechens unter hoher Spannung sowie geometrisch nichtlinearer Effekte erfolgt iterativ innerhalb jedes Zeitschritts. Mit der Einführung von Spannungsbegrenzungen als zusätzliche Nebenbedingungen können in jeder Iteration Materialplastizierungen, Rißbildungen des Betons bzw. „tension stiffening“-Effekte ohne prinzipielle Veränderung des mathematischen Modells berücksichtigt werden.

5.2 Prinzip vom Minimum des konjugierten Gesamtpotentials

Die Behandlung mechanischer Probleme wird dann kompliziert, wenn physikalisch bzw. geometrisch nichtlineare Einflüsse berücksichtigt werden sollen. Für die Lösung solcher Aufgaben werden derzeit zumeist Algorithmen angewendet, die auf inkrementellen bzw. iterativen Methoden basieren. Das nichtlineare Problem wird dabei in jedem Berechnungsschritt, zum Beispiel durch Modifikation der Steifigkeiten, in ein lineares Problem überführt, so daß die Berechnung auf die Lösung linearer Gleichungssysteme hinausläuft.

Ein alternatives Berechnungsverfahren folgt aus der Formulierung des mechanischen Problems als Extremalaufgabe, die nach entsprechender Diskretisierung in eine Optimierungsaufgabe überführt werden kann. Das Problem kann mit den Methoden der mathematischen Optimierung gelöst werden, wobei der Vorteil gegenüber anderen Verfahren in der Berücksichtigung zusätzlicher Ungleichungsbedingungen liegt, mit denen z.B. Materialplastizierungen erfaßt werden können.

Ausgangspunkt für die Formulierung eines mechanischen Problems als Extremalaufgabe ist der *Energiesatz der Mechanik*, der sich auf mathematischem Wege aus dem *Gausschen Integralsatz* herleiten läßt. Danach gilt für zwei voneinander völlig unabhängige Funktionen **a** und **b**

$$\int_V (\mathbf{D}\mathbf{a})^T \mathbf{b} \, dV + \int_V \mathbf{a}^T \mathbf{D}^T \mathbf{b} \, dV = \int_S \mathbf{a}^T \mathbf{D}_S^T \mathbf{b} \, dS, \quad (5.2-1)$$

wobei der Vektor **a** als Vektor beliebiger Verschiebungen **u** und der Vektor **b** als Vektor beliebiger Spannungen **σ** interpretiert werden kann. Mit

$$\mathbf{a} = \mathbf{u},$$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma}$$

ergibt sich der *Integralsatz von Gauss* für beliebige Verschiebungen und beliebige Spannungen. Im geometrisch linearen Fall (Theorie 1. Ordnung) gilt zusätzlich

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_k = \mathbf{D}_e^T, \quad (5.2-2)$$

so daß geschrieben werden kann:

$$\int_V (\mathbf{D}_k \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{D}_S^T \boldsymbol{\sigma} \, dS. \quad (5.2-3)$$

Wird ein räumlicher Verschiebungs- bzw. Spannungszustand und ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt, können die Vektoren **u** und **σ**, sowie die Differentialoperatoren **D_k** und **D_e** folgendermaßen definiert werden:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \sigma_{xy} & \sigma_{yz} & \sigma_{xz} \end{bmatrix}^T.$$

$$\mathbf{D}_k^T = \mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Aus der Gültigkeit des Gausschen Integralsatzes für beliebige Verschiebungen und beliebige Spannungen folgt die Gültigkeit für geometrisch zulässige Verschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ und statisch zulässige Spannungen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Nach Zerlegung der Oberfläche S in den Bereich S_r mit den vorgegebenen Randverschiebungen $\check{\mathbf{r}}$ und in den Bereich S_t mit vorgegebenen Oberflächenspannungen $\check{\mathbf{t}}$ erhält man

$$\int_V (\mathbf{D}_k \hat{\mathbf{u}})^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dV + \int_V \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}_e \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dV = \int_{S_t} \hat{\mathbf{u}}^T \check{\mathbf{t}} dS + \int_{S_r} \check{\mathbf{r}}^T \mathbf{R}_t^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} dS, \quad (5.2-4)$$

wobei $\check{\mathbf{r}}$ und $\check{\mathbf{t}}$ durch

$$\check{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \check{r}_x & \check{r}_y & \check{r}_z \end{bmatrix}^T$$

$$\check{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} \check{t}_x & \check{t}_y & \check{t}_z \end{bmatrix}^T$$

definiert sind. Dabei müssen die statisch zulässigen Spannungen die Gleichgewichtsbedingungen als statische Feldgleichungen sowie die statischen Randbedingungen erfüllen.

$$\mathbf{D}_e \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{p} = 0 \quad \in V \quad (5.2-5)$$

$$\mathbf{R}_t^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \check{\mathbf{t}} = 0 \quad \in S_t \quad (5.2-6)$$

In gleicher Weise sind Verschiebungen nur dann zulässig, wenn sie die Verträglichkeitsbedingungen als kinematische Feldgleichungen und die geometrischen Randbedingungen befriedigen.

$$\mathbf{D}_k \hat{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad \in V \quad (5.2-7)$$

$$\mathbf{R}_r \hat{\mathbf{u}} - \check{\mathbf{r}} = 0 \quad \in S_r \quad (5.2-8)$$

Dabei bezeichnen $\boldsymbol{\varepsilon}$ den Vektor der inneren Deformationen und \mathbf{p} den Vektor der Volumenkräfte.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{xz} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T$$

Desweiteren ist \mathbf{R}_t die Matrix des Richtungskosinus der Außennormalen an die Oberfläche S und ist den statischen Randbedingungen zugeordnet.

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \cos(n,x) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(n,y) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n,z) \\ \cos(n,y) & \cos(n,x) & 0 \\ 0 & \cos(n,z) & \cos(n,y) \\ \cos(n,z) & 0 & \cos(n,x) \end{bmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{R}_r ist der zu der geometrischen Randbedingung gehörende Randoperator und stellt die Verknüpfung zwischen den vorgegeben Randverschiebungen und dem Verschiebungsvektor $\hat{\mathbf{u}}$ her.

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aus Gl.(5.2-4) läßt sich der *Energiesatz der Mechanik* ableiten, indem die statisch zulässigen Spannungen und die geometrisch zulässigen Verschiebungen durch die tatsächlich vorhandenen Spannungen $\bar{\sigma}$ und Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ ersetzt werden.

$$\int_V (\mathbf{D}_k \bar{\mathbf{u}})^T \bar{\sigma} dV + \int_V \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}_e \bar{\sigma} dV - \int_{S_t} \bar{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{t}} dS - \int_{S_r} \tilde{\mathbf{r}}^T \mathbf{R}_t^T \bar{\sigma} dS = 0 \quad (5.2-9)$$

Weiterhin ist Gl.(5.2-4) der Ausgangspunkt für die klassischen Variationsprinzipie, das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* und das *Prinzip der virtuellen Spannungen*, aus denen entsprechende Extremalprinzipie abgeleitet werden können.

Die weitere Vorgehensweise basiert auf dem Prinzip der virtuellen Spannungen. Dazu wird angenommen, daß sich der betrachtete Spannungszustand $\tilde{\sigma}$ in einen tatsächlichen Anteil $\bar{\sigma}$ und in einen virtuellen Anteil $\delta\sigma$ zerlegen läßt:

$$\tilde{\sigma} = \bar{\sigma} + \delta\sigma, \quad (5.2-10)$$

so daß für Gl.(5.2-4) folgt

$$\begin{aligned} & \int_V (\mathbf{D}_k \hat{\mathbf{u}})^T \bar{\sigma} dV + \int_V \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}_e \bar{\sigma} dV - \int_{S_t} \hat{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{t}} dS - \int_{S_r} \tilde{\mathbf{r}}^T \mathbf{R}_t^T \bar{\sigma} dS + \\ & \int_V (\mathbf{D}_k \hat{\mathbf{u}})^T \delta\sigma dV + \int_V \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}_e \delta\sigma dV - \int_{S_t} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{R}_t^T \delta\sigma dS - \int_{S_r} \tilde{\mathbf{r}}^T \mathbf{R}_t^T \delta\sigma dS = 0 \end{aligned} \quad (5.2-11)$$

Für die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen gilt nach Variation des Spannungszustandes:

$$\mathbf{D}_e \bar{\sigma} + \mathbf{D}_e \delta\sigma + \mathbf{p} = 0 \quad \in V, \quad (5.2-12)$$

$$\mathbf{R}_t \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{R}_t \delta \boldsymbol{\sigma} - \check{\mathbf{t}} = 0 \quad \in S_t. \quad (5.2-13)$$

Da die Gln.(5.2-12,13) bereits durch den tatsächlichen Spannungszustand $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ erfüllt sind, gilt:

$$\mathbf{D}_e \delta \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \in V \quad (5.2-14)$$

$$\mathbf{R}_t \delta \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad \in S_t \quad (5.2-15)$$

Unter Berücksichtigung des *Energiesatzes der Mechanik* (Gl.(5.2-9)) und der Beziehungen Gl.(5.2-14) und Gl.(5.2-15) erhält man aus Gl.(5.2-11) die Variationsgleichung für das *Prinzip der virtuellen Spannungen*.

$$\int_V (\mathbf{D}_k \hat{\mathbf{u}})^T \delta \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{S_t} \check{\mathbf{r}}^T \mathbf{R}_t^T \delta \boldsymbol{\sigma} dS = 0 \quad (5.2-16)$$

Die Beziehung Gl.(5.2-16) gilt dabei für jeden Zeitpunkt t_k . Nach Einsetzen der kinematischen Beziehung (5.2-7) in das Prinzip der virtuellen Spannungen erhält man unter Berücksichtigung des zeitabhängigen Materialverhaltens

$$\int_V \boldsymbol{\varepsilon}(t_k)^T \delta \boldsymbol{\sigma}(t_k) dV - \int_{S_t} \check{\mathbf{r}}(t_k)^T \mathbf{R}_t^T \delta \boldsymbol{\sigma}(t_k) dS = 0. \quad (5.2-17)$$

Unter Voraussetzung isotropen Materialverhaltens und der vereinfachenden Annahme spannungsunabhängiger Querdehnzahlen lautet die mehrachsige Verallgemeinerung der diskretisierten konstitutiven Beziehung (4.2-24) unter Einbeziehung zusätzlicher zeitunabhängiger ideal-plastischer Deformationen nach dem assoziierten Fließgesetz $\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\lambda}_p$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_k) = \mathbf{E}(t_k)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_k) \Phi_{k,k} + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}(t_i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \Phi_{k,i} + \boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) + \mathbf{F}^T \boldsymbol{\lambda}_p, \quad (5.2-18)$$

wobei durch \mathbf{F} die Fließfunktion beschrieben wird und der Fließparameter $\boldsymbol{\lambda}_p$ die Nichtnegativitätsbedingung

$$\boldsymbol{\lambda}_p \geq 0 \quad (5.2-19)$$

erfüllen muß. Weiterhin dürfen die Spannungen an keiner Stelle des betrachteten Körpers den jeweils zulässigen Wert überschreiten, d.h. die Plastizitätsbedingung

$$\mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}(t_k) - \mathbf{s}_0(t_k) \leq 0 \quad \in V \quad (5.2-20)$$

darf nicht verletzt werden. Außerdem sind in Gl.(5.2-18):

$$\mathbf{E}(t_i)^{-1} = \frac{1}{E(t_i)} \mathbf{B}(t_i) - \quad \text{die zeitabhängige Elastizitätsmatrix zum Zeitpunkt } t_i \text{ mit}$$

$$\mathbf{B}(t_i) = \begin{bmatrix} 1 & -\mu(t_i) & -\mu(t_i) & 0 & 0 & 0 \\ -\mu(t_i) & 1 & -\mu(t_i) & 0 & 0 & 0 \\ -\mu(t_i) & -\mu(t_i) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu(t_i)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu(t_i)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu(t_i)) \end{bmatrix}.$$

Für den Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k)$ ist einzusetzen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) = \boldsymbol{\varepsilon}(t_{k-1}) - \mathbf{E}(t_{k-1})^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_{k-1}) \boldsymbol{\Psi}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t_k) - \boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t_{k-1}), \quad (5.2-21)$$

wobei sich der Vektor der Schwindverformungen $\boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t_i)$ in der Form

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{sh}(t_i) = [\varepsilon_{sh}(t_i) \quad \varepsilon_{sh}(t_i) \quad \varepsilon_{sh}(t_i) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (5.2-22)$$

angeben läßt.

Unter Berücksichtigung des Sachverhalts, daß bei Anwendung eines assoziierten Fließgesetzes der Vektor der differentiellen plastischen Deformation senkrecht auf dem Tangentenvektor der Fließfunktion F steht und damit von den virtuellen Spannungen im plastischen Zustand keine Arbeit verrichtet wird [5.1][5.2][5.3], erhält man nach Einsetzen des diskretisierten zeitabhängigen Materialgesetzes Gl.(5.2-18) in das Prinzip der virtuellen Spannungen Gl.(5.2-17) folgende Variationsgleichung:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}(t_k)^T \mathbf{E}(t_k)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_k) \Phi_{k,k} dV + \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}(t_k)^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}(t_i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \Phi_{k,i} dV + \\ & \int_V \delta \boldsymbol{\sigma}(t_k)^T \boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) dV - \int_{S_r} \tilde{\mathbf{r}}(t_k)^T \mathbf{R}_t^T \delta \boldsymbol{\sigma}(t_k) dS = 0 \end{aligned} \quad (5.2-23)$$

Aus dieser Variationsgleichung kann prinzipiell ein Extremalprinzip abgeleitet werden, wenn die Abhängigkeit der Hilfswerte $\Phi_{k,i}$ von der zum Zeitpunkt t_k aktuellen Spannung geklärt ist. Dabei ergeben sich folgende Fallunterscheidungen:

- 1) bei Anwendung der *linearen* Kriechtheorie sind die $\Phi_{k,i}$ -Werte auf jeden Fall *unabhängig* von $\boldsymbol{\sigma}(t_k)$,
- 2) bei Anwendung der *nichtlinearen* Kriechtheorie besteht eine *Abhängigkeit* der $\Phi_{k,i}$ -Werte von der zum Zeitpunkt t_k *aktuellen Spannung* $\boldsymbol{\sigma}(t_k)$.

Wegen der Unabhängigkeit der $\Phi_{k,i}$ -Werte von $\boldsymbol{\sigma}(t_k)$ kann das Extremalprinzip für den Fall 1) folgendermaßen aufgestellt werden:

Von allen statisch zulässigen Spannungszuständen tritt zum Zeitpunkt t_k derjenige ein, für den das konjugierte Gesamtpotential zum Zeitpunkt t_k ein Minimum annimmt.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}(t_k)^T \mathbf{E}(t_k)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_k) \Phi_{k,k} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}(t_k)^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}(t_i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \Phi_{k,i} dV + \\ & \int_V \boldsymbol{\sigma}(t_k)^T \boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) dV - \int_{S_r} \tilde{\mathbf{r}}(t_k)^T \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}(t_k) dS \Rightarrow \text{Minimum} \end{aligned} \quad (5.2-24)$$

Als statisch zulässiger Spannungszustand ist der Spannungszustand definiert, der die Gleichgewichtsbedingungen Gl.(5.2-5) und die statischen Randbedingungen Gl.(5.2-6) zum Zeitpunkt t_k erfüllt und an keiner Stelle die Plastizitätsbedingungen Gl.(5.2-20) verletzt.

Aus der Struktur des quadratischen Funktional Gl.(5.2-24) läßt sich die für den Lösungsalgorithmus wichtige Eigenschaft der *Konvexität* ableiten. Dazu ist zu zeigen, daß für je zwei Punkte $\boldsymbol{\sigma}_1(t_k), \boldsymbol{\sigma}_2(t_k) \in M$ und jedes λ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ die Konvexitätsungleichung

$$\Pi(\lambda \boldsymbol{\sigma}_1(t_k) + (1-\lambda) \boldsymbol{\sigma}_2(t_k)) \leq \lambda \Pi(\boldsymbol{\sigma}_1(t_k)) + (1-\lambda) \Pi(\boldsymbol{\sigma}_2(t_k)) \quad (5.2-25)$$

an jeder Stelle des *zulässigen Bereichs* gilt, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge ist. Die geometrische Bedeutung von Gl.(5.2-25) ist, daß die Funktionswerte von $\Pi(\boldsymbol{\sigma}(t_k))$ im Intervall $[\Pi(\boldsymbol{\sigma}_1(t_k)), \Pi(\boldsymbol{\sigma}_2(t_k))]$ immer unterhalb der die Punkte $\boldsymbol{\sigma}_1(t_k)$ und $\boldsymbol{\sigma}_2(t_k)$ verbindenden Sekante liegen müssen. Diese Forderung wird von dem Funktional Gl.(5.2-24) grundsätzlich erfüllt, da die Elastizitätsmatrix $\mathbf{E}(t_k)^{-1}$ und die Werte $\Phi_{k,k}$ als Koeffizienten des quadratischen Gliedes stets positiv und damit die partiellen 2.Ableitungen des Funktional immer größer als 0 sind.

Mit der Annahme, daß die Plastizitätsbedingungen ebenfalls durch konvexe Funktionen beschrieben werden und die Gleichgewichtsbedingungen lineare Funktionen sind, liegt ein sogenanntes *konvexes Optimierungsproblem* vor. Die Konvexitätsforderung für die Plastizitätsbedingungen sichert, daß eine zwei zulässige Punkte verbindende Strecke immer im zulässigen Bereich bleibt. Aus demselben Grund besteht die Linearitätsforderung für die Gleichgewichtsbedingungen.

Der Vorteil der Konvexität eines Optimierungsproblems liegt darin, daß ein lokales Minimum zugleich das globale Minimum des Problems darstellt. Bei nichtkonvexen Problemen können mehrere lokale Minima auftreten, wobei das Finden des globalen Minimums in den meisten Fällen sehr problematisch ist.

Im Gegensatz dazu kann für den Fall der Anwendung der nichtlinearen Kriechtheorie aufgrund der Abhängigkeit der $\Phi_{k,i}$ -Werte von $\boldsymbol{\sigma}(t_k)$ direkt kein Extremalprinzip gefunden werden, das sich durch ein konvexes Funktional beschreiben läßt. Die Anwendung von Lösungsverfahren auf Fall 2), die die Konvexität des Problems voraussetzen, erfordert eine Linearisierung der Materialbeziehung Gl.(5.2-18). Die Linearisierung erfolgt durch die Einführung einer iterativen Vorgehensweise, wobei die jeweiligen $\Phi_{k,i}$ -Werte für den aktuellen Iterationsschritt j mit Hilfe der Spannung aus dem vorangegangenen Iterationsschritt $j-1$ berechnet werden, so daß gilt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}(t_k) = \mathbf{E}(t_k)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) \Phi_{k,k}^{(j-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}(t_i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \Phi_{k,i}^{(j-1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) + \mathbf{F}^T \boldsymbol{\lambda}_p. \quad (5.2-26)$$

Nach Einsetzen von Gl.(5.2-26) in das Prinzip der virtuellen Spannungen kann folgendes Extremalprinzip abgeleitet werden:

Von allen statisch zulässigen Spannungszuständen zum Zeitpunkt t_k tritt derjenige ein, für den das konjugierte Gesamtpotential zum Zeitpunkt t_k in der Iteration j ein Minimum annimmt.

$$\begin{aligned} \Pi^{(j)} = & \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \mathbf{E}(t_k)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) \Phi_{k,k}^{(j-1)} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}(t_i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \Phi_{k,i}^{(j-1)} dV + \\ & \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) dV - \int_{S_r} \check{\mathbf{r}}(t_k)^T \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dS \Rightarrow \text{Minimum} \end{aligned} \quad (5.2-27)$$

Dabei müssen die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) + \mathbf{p}(t_k) = 0, \quad \in V \quad (5.2-28)$$

die statischen Randbedingungen:

$$\mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) - \check{\mathbf{t}}(t_k) = 0 \quad \in S_f \quad (5.2-29)$$

und die Plastizitätsbedingungen:

$$\mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) - \mathbf{s}_0(t_k) \leq 0 \quad \in V \quad (5.2-30)$$

erfüllt sein. Weiterhin soll an dieser Stelle erwähnt werden, daß die Funktionale Gl.(5.2-24) und Gl.(5.2-27) in das *Castigliano-Prinzip* übergehen, wenn linear elastisches Materialverhalten vorliegt.

5.3 Lagrangefunktion und Optimalitätskriterien

Mit der Anwendung der Multiplikatorenmethode nach *Lagrange* besteht die Möglichkeit, Zielfunktion und Restriktionen in einer Funktion zu berücksichtigen, indem die Gleichungs- und Ungleichungsbedingungen mit einem *Lagrangeparameter* multipliziert und additiv an die Zielfunktion angehängt werden. Für das Gleichungssystem Gln.(5.2-27)-(5.2-30) erhält man:

$$\begin{aligned}
 L^{(j)} = & \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \mathbf{E}(t_k)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) \Phi_{k,k}^{(j-1)} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}(t_i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \Phi_{k,i}^{(j-1)} dV + \\
 & \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) dV - \int_{S_t} \tilde{\mathbf{r}}(t_k)^T \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dS + \\
 & \int_V \boldsymbol{\lambda}_u^T (\mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) + \mathbf{p}(t_k)) dV + \int_{S_t} \boldsymbol{\lambda}_{u_s}^T (\mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) - \tilde{\mathbf{t}}(t_k)) dS + \\
 & \int_V \boldsymbol{\lambda}_p^T (\mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) - \mathbf{s}_0(t_k)) dV \Rightarrow \text{stationär}
 \end{aligned} \tag{5.3-1}$$

mit $\lambda_p \geq 0$. Dieses Prinzip, dem das *Prinzip von Hu* bei linear elastischem Materialverhalten entspricht, wird auch als *Lagrangesches Sattelpunkt Optimalitätskriterium* bezeichnet. Die Lagrangefunktion hat dabei die Eigenschaft, daß sich an einem Sattelpunkt von $L^{(j)}$ gleichzeitig ein lokales Minimum der zugehörigen Optimierungsaufgabe befindet. Ein Punkt $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_u, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{u_s}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_p)$ heißt Sattelpunkt von $L^{(j)}$ wenn für alle $\boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k), \boldsymbol{\lambda}_u, \boldsymbol{\lambda}_{u_s}$ und $\lambda_p \geq 0$ gilt:

$$L^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k), \boldsymbol{\lambda}_u, \boldsymbol{\lambda}_{u_s}, \lambda_p) \leq L^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_u, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{u_s}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_p) \leq L^{(j)}(\boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k), \bar{\boldsymbol{\lambda}}_u, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{u_s}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}_p). \tag{5.3-2}$$

Für konvexe Optimierungsprobleme, also auch für die Gln.(5.2-24,27) ist diese Bedingung notwendig und hinreichend für das Auftreten eines globalen Minimums. Unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Lagrangefunktion gilt am Sattelpunkt die (notwendige) *Kuhn-Tucker-Bedingung*:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \Pi^{(j)}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k))}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)} + \frac{\partial \int_V \bar{\boldsymbol{\lambda}}_u^T (\mathbf{D}_e \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k) + \mathbf{p}(t_k)) dV}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)} + \\
 & \frac{\partial \int_{S_t} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{u_s}^T (\mathbf{R}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k) - \tilde{\mathbf{t}}(t_k)) dS_t}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)} + \frac{\partial \int_V \bar{\boldsymbol{\lambda}}_p^T (\mathbf{F} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k) - \mathbf{s}_0(t_k)) dV}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)} = 0
 \end{aligned} \tag{5.3-3a}$$

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_p^T (\mathbf{F} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k) - \mathbf{s}_0(t_k)) = 0 \tag{5.3-3b}$$

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_p \geq 0 \tag{5.3-3c}$$

die damit ein notwendiges und hinreichendes Optimalitätskriterium für konvexe Optimierungsprobleme darstellt. Bei nichtkonvexen Problemen ist diese Bedingung hinreichend aber nicht notwendig, was bedeutet, daß nicht zu jeder Lösung der Optimierungsaufgabe ein Sattelpunkt der zugehörigen Lagrangefunktion existiert.

Um die Lagrangemultiplikatoren zu identifizieren, wird in Gl.(5.3-1) folgende Umformung vorgenommen:

$$\int_V \lambda_u^T (\mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) + \mathbf{p}(t_k)) dV = \int_V \lambda_u^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dV + \int_V \lambda_u^T \mathbf{p}(t_k) dV. \quad (5.3-4)$$

Mit Hilfe des Gausschen Integralsatzes kann folgende Ersetzung angewendet werden:

$$\int_V \lambda_u^T \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dV = - \int_V (\mathbf{D}_k \lambda_u)^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dV + \int_{S_t} \lambda_{u_s}^T \check{\mathbf{t}} dS + \int_{S_r} \lambda_{u_s}^T \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dS, \quad (5.3-5)$$

wobei sich die Oberfläche S in die Bereiche S_t und S_r zerlegen läßt. Nach Einsetzen in Gl.(5.3-1) erhält man das Stationaritätsprinzip:

$$\begin{aligned} L^{(j)} = & \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \mathbf{E}(t_k)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) \Phi_{k,k}^{(j-1)} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}(t_i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \Phi_{k,i}^{(j-1)} dV + \\ & \int_V \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)^T \boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) dV - \int_{S_r} \check{\mathbf{r}}(t_k)^T \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dS - \int_V (\mathbf{D}_k \lambda_u)^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dV + \\ & \int_{S_t} \lambda_{u_s}^T \check{\mathbf{t}} dS + \int_{S_r} \lambda_{u_s}^T \mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) dS + \int_V \lambda_u^T \mathbf{p}(t_k) dV + \int_{S_t} \lambda_{u_s}^T (\mathbf{R}_t^T \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) - \check{\mathbf{t}}(t_k)) dS + \\ & \int_V \lambda_p^T (\mathbf{F} \boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k) - \mathbf{s}_0(t_k)) dV \Rightarrow \text{stationär} \end{aligned} \quad (5.3-6)$$

aus dem für den Sonderfall linear elastischen Materialverhaltens das *Prinzip von Hellinger-Reißner* hervorgeht. Mit der Differentiation von Gl.(5.3-6) nach $\boldsymbol{\sigma}^{(j)}(t_k)$ erhält man wegen der *Kuhn-Tucker-Bedingung*:

$$\mathbf{E}(t_k)^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{(j)}(t_k) \Phi_{k,k}^{(j-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{E}(t_i)^{-1} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \Phi_{k,i}^{(j-1)} + \boldsymbol{\varepsilon}_v(t_k) + \mathbf{F}^T \bar{\lambda}_p - \mathbf{D}_k \bar{\lambda}_u = 0 \quad \in V, \quad (5.3-7)$$

$$-\check{\mathbf{r}}(t_k)^T \mathbf{R}_t^T + \bar{\lambda}_{u_s}^T \mathbf{R}_t^T = 0 \quad \in S_r, \quad (5.3-8)$$

$$\bar{\lambda}_{u_s}^T \mathbf{R}_t^T = 0 \quad \in S_t. \quad (5.3-9)$$

Aufgrund des Materialgesetzes Gl.(5.2-26) lassen sich in Gl.(5.3-7) die ersten vier Glieder zu $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)}(t_k)$ zusammenfassen, so daß der Ausdruck:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)}(t_k) - \mathbf{D}_k \bar{\lambda}_u = 0 \quad (5.3-10)$$

entsteht, der die kinematische Beziehung am optimalen Punkt darstellt. Wegen Gl.(5.2-7) kann der Lagrangeparameter $\bar{\lambda}_u$ als Verschiebungsvektor $\bar{\mathbf{u}}(t_k)$ am optimalen Punkt identifiziert werden.

$$\bar{\lambda}_u = \bar{\mathbf{u}}(t_k) \quad (5.3-11)$$

Gl.(5.3-8) liefert die Identität für den Lagrangemultiplikator $\bar{\lambda}_{u_s}$ mit dem Vektor der vorgegebenen Randverschiebungen $\bar{\mathbf{r}}(t_k)$:

$$\bar{\lambda}_{u_s} = \bar{\mathbf{r}}(t_k). \quad (5.3-12)$$

Aus dieser Aussage und Gl.(5.3-9) folgt, daß auf dem Rand mit vorgegebenen Spannungen keine vorgegebenen Verschiebungen auftreten dürfen.

Die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion nach den Lagrangeparametern ergeben die Gleichgewichtsbedingungen, die statischen Randbedingungen und die Plastizitätsbedingungen der Ausgangsaufgabe.

5.4 Überführung des Extremalprinzips in eine Optimierungsaufgabe

5.4.1 Annahmen und Voraussetzungen

Die numerische Behandlung des in Abschn. 5.2 hergeleiteten Extremalprinzips erfordert die Überführung der Gln.(5.2-27)-(5.2-30) in eine quadratische Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen in Form von Gleichungen und Ungleichungen, indem das zu betrachtende Tragwerk an diskreten Punkten beschrieben wird. Die Optimierungsaufgabe kann dabei prinzipiell für jede beliebige Tragwerksart aufgestellt werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Diskretisierung auf die Art des speziell zu untersuchenden Tragwerks abgestimmt. Zu diesem Zweck werden folgende Annahmen und Voraussetzungen getroffen:

1. Es werden nur stabförmige Bauteile untersucht.
2. Die *Naviersche Hypothese* Schubsteifer ebener gerader Stäbe ist gültig, d.h. die Querschnitte bleiben auch im verformten Zustand eben (*1.Hypothese von Bernoulli*) und liegen senkrecht zur verformten Stabachse (*2.Hypothese von Bernoulli*).
3. Vernachlässigung des Einflusses der Querkraft auf die Formänderungsenergie.
4. Torsionseinflüsse bleiben unberücksichtigt.
5. Alle Querschnittsanteile stehen untereinander im starren Verbund.
6. Der Einfluß der Querdehnung wird nicht berücksichtigt, d.h. es werden nur Spannungs- und Dehnungszustände in Stablängsrichtung betrachtet.

Mit diesen getroffenen Annahmen und der weiteren Einschränkung, daß nur solche Tragwerksteile untersucht werden, bei denen keine eingepprägten Randverformungen zu berücksichtigen sind, lautet das Extremalprinzip in eindimensionaler Form:

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x^{(j)}(t_k) \frac{\Phi_{k,k}^{(j-1)}}{E(t_k)} \sigma_x^{(j)}(t_k) dV + \int_V \sigma_x^{(j)}(t_k) \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sigma_x(t_i)}{E(t_i)} \Phi_{k,i}^{(j-1)} + \varepsilon_{x,v}(t_k) \right] dV \Rightarrow \text{Minimum}, \quad (5.4.1-1)$$

mit der Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\partial \sigma_x^{(j)}(t_k)}{\partial x} + p_x(t_k) = 0 \quad \in V, \quad (5.4.1-2)$$

der statischen Randbedingung:

$$\sigma_x^{(j)}(t_k) - \tilde{t}_x(t_k) = 0 \quad \in S_t, \quad (5.4.1-3)$$

und den Plastizitätsbedingungen:

$$\sigma_x^{(j)}(t_k) - s_{x,0}(t_k) \leq 0 \in V. \quad (5.4.1-4)$$

Die Diskretisierung wird nachfolgend unter Berücksichtigung der eben genannten Annahmen und Voraussetzungen an dem eindimensionalen Modell vorgenommen.

5.4.2 Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen am Querschnitt

Die zeitabhängige Materialbeziehung, gegeben durch Gl.(4.2-31), gilt für jede infinitesimal kleine Querschnittsfaser. Aufgrund ihres Zusammenwirkens im Querschnitt kann die Berechnung des Spannungs- bzw. Dehnungszustandes einer Faser nicht losgelöst von den übrigen Querschnittsanteilen erfolgen. Vielmehr sind die Fasern untereinander gekoppelt, was durch die Verträglichkeitsbedingungen mathematisch beschrieben wird.

Mit den in Abschn. 5.4.1 getroffenen Annahmen können die Dehnungen und Verdrehungen einer Querschnittsfaser l aus den Deformationen des Gesamtquerschnitts zum Zeitpunkt t_k berechnet.

$$\varepsilon_{l,x}(t_k) = \varepsilon_x(t_k) + \kappa_y(t_k) \cdot z_l + \kappa_z(t_k) \cdot y_l \quad (5.4.2-1)$$

$$\kappa_{l,y}(t_k) = \kappa_y(t_k) \quad (5.4.2-2)$$

$$\kappa_{l,z}(t_k) = \kappa_z(t_k) \quad (5.4.2-3)$$

Dabei wird mit ε_x die Dehnung in Stablängsrichtung in einer beliebigen Bezugsachse, mit κ_y bzw. κ_z die Verdrehung des Gesamtquerschnitts um die y- bzw. z-Achse bezeichnet. Die mit dem Index l versehenen Größen beschreiben die Dehnung und die Verdrehungen einer beliebigen Querschnittsfaser l , die den Abstand z_l bzw. y_l zu dieser Bezugsachse hat. Die Gln.(5.4.2-1) bis (5.4.2-3) werden durch Abb.5.4.2-1 verdeutlicht.

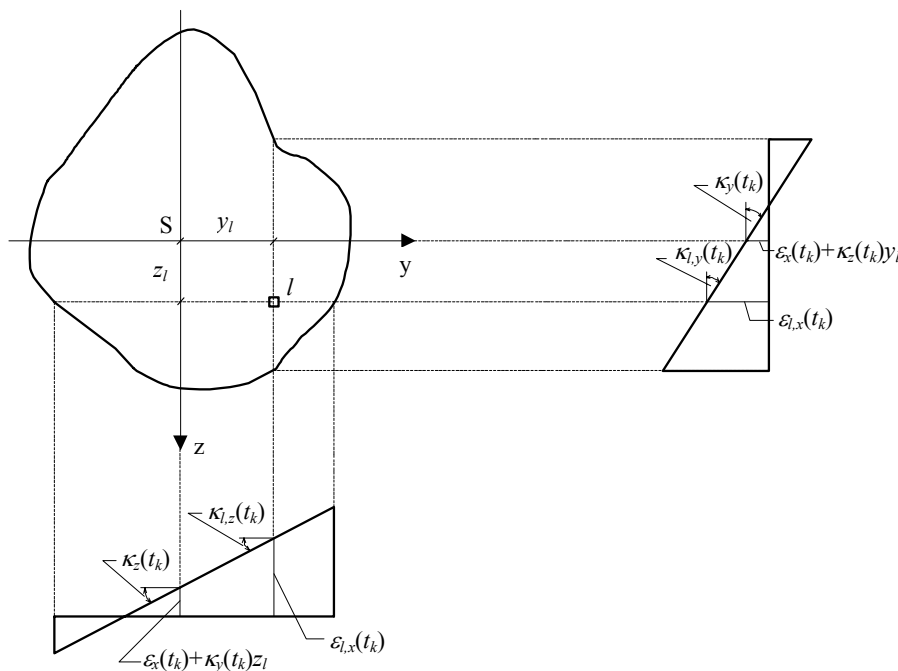


Abb. 5.4.2-1: Verträglichkeitsbedingungen am Querschnitt

Zusätzlich zu den Verträglichkeitsbedingungen müssen zu jedem Zeitpunkt t_k die Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Schnittgrößen $N_x(t_k)$, $M_y(t_k)$, $M_z(t_k)$ und den Normalspannungen $\sigma_x(t_k)$ am Querschnitt erfüllt sein. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\int_{A(t_k)} \sigma_x(t_k) dA(t_k) = N_x(t_k) \quad (5.4.2-4)$$

$$\int_{A(t_k)} \sigma_x(t_k) \cdot z(t_k) dA(t_k) = M_y(t_k) \quad (5.4.2-5)$$

$$\int_{A(t_k)} \sigma_x(t_k) \cdot y(t_k) dA(t_k) = M_z(t_k) \quad (5.4.2-6)$$

Dabei sind A , y , z mit Rücksichtnahme auf die mögliche Veränderung der Querschnittswerte innerhalb des Kriech- und Schwindzeitraums (z.B. nachträglich ergänzte Stahlbetonquerschnitte) vom jeweiligen Betrachtungszeitpunkt abhängig.

Aufgrund der zu erwartenden nichtlinearen Spannungsverteilung über den Querschnitt infolge Inhomogenität des Materials, Rißbildung und Plastizierung des Betons bzw. Fließen des Stahls ist es notwendig, die Normalspannungen $\sigma_x(t_k)$ durch Schnittgrößenanteile zu ersetzen. Voraussetzung dafür ist eine Zerlegung des Gesamtquerschnitts in Querschnittsanteile des Betons, des nichtvorgespannten Stahls und des Spannstahls, da diese als Materialien mit unterschiedlichen Eigenschaften im Querschnitt zusammenwirken. Mit der zusätzlichen Aufspaltung des Betonquerschnittsanteils in Anteile mit unterschiedlichen Materialeigenschaften (z.B. unterschiedliche Druckfestigkeiten, Wirksamwerden der einzelnen Anteile zu unterschiedlichen Zeitpunkten) kann das Verhalten von Querschnitten, in denen unterschiedliche Materialien zusammenwirken, gut beschrieben werden.

Zur Berücksichtigung der Nichtlinearität des Materialverhaltens der einzelnen Anteile können diese in einzelne Schichten bzw. Fasern mit endlich kleiner Dicke zerlegt werden. Die Art der Diskretisierung ist dabei von der Beanspruchung abhängig, bei einachsiger Biegung ist eine Einteilung des Gesamtquerschnitts in in einer Richtung (Schichtenmodell) ausreichend, während bei Doppelbiegung eine Diskretisierung in y - und z -Richtung (Fasernmodell) vorzunehmen ist.

Nach Zerlegung des Gesamtquerschnitts in r Querschnittsanteile l erhält man die Gleichgewichtsbedingungen für den diskretisierten Querschnitt.

$$\sum_{l=1}^r N_{l,x}(t_k) = N_x(t_k) \quad (5.4.2-7)$$

$$\sum_{l=1}^r (N_{l,x}(t_k) \cdot z_l + M_{l,y}(t_k)) = M_y(t_k) \quad (5.4.2-8)$$

$$\sum_{l=1}^r (N_{l,x}(t_k) \cdot y_l + M_{l,z}(t_k)) = M_z(t_k) \quad (5.4.2-9)$$

Jedem Querschnittsanteil l kann in Abhängigkeit seiner Dehn- bzw. Biegesteifigkeiten ein Normalkraftanteil und zwei Momentenanteile zugeordnet werden. Bei einer sehr feinen Diskretisierung, bzw. bei einzelnen Bewehrungs- bzw. Spannstählen, ist der Einfluß der Momentenanteile auf die Berechnungsergebnisse aufgrund der vorhandenen kleinen Biegesteifigkeiten sehr gering, so daß diese im Einzelfall nicht berücksichtigt werden brauchen.

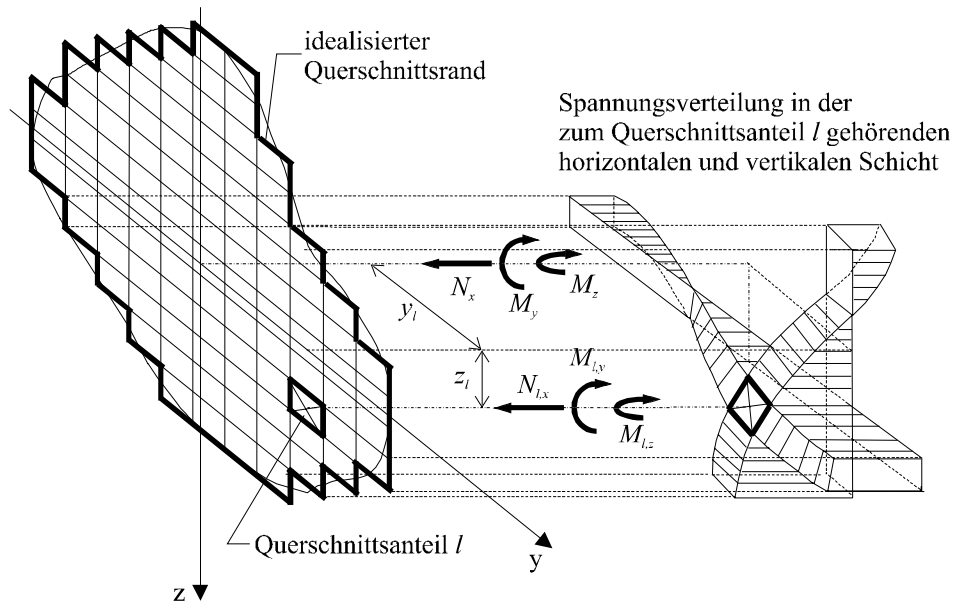


Abb. 5.4.2-2: Gleichgewichtsbedingungen am diskretisierten Querschnitt

Die Gleichgewichtsbedingungen Gln.(5.4.2-7..9) und die Verträglichkeitsbedingungen Gln.(5.4.2-1..3) werden zur besseren Übersichtlichkeit in Matrizenschreibweise angegeben:

Gleichgewichtsbedingungen:

$$-\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k + \mathbf{s}_k = 0, \quad (5.4.2-10)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ -z_1 & -1 & 0 & \cdots & -z_l & -1 & 0 & \cdots & -z_r & -1 & 0 \\ -y_1 & 0 & -1 & \cdots & -y_l & 0 & -1 & \cdots & -y_r & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{1,k} \\ \vdots \\ \sigma_{l,k} \\ \vdots \\ \sigma_{r,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_x(t_k) \\ M_y(t_k) \\ M_z(t_k) \end{bmatrix} = 0.$$

Verträglichkeitsbedingungen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k - \mathbf{a}_k \mathbf{q}_k = 0 \quad (5.4.2-11)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,k} \\ \vdots \\ \varepsilon_{l,k} \\ \vdots \\ \varepsilon_{r,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ -z_1 & -1 & 0 & \cdots & -z_l & -1 & 0 & \cdots & -z_r & -1 & 0 \\ -y_1 & 0 & -1 & \cdots & -y_l & 0 & -1 & \cdots & -y_r & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t_k) \\ \kappa_y(t_k) \\ \kappa_z(t_k) \end{bmatrix} = 0$$

Durch die Untervektoren $\boldsymbol{\varepsilon}_{l,k}$ und $\boldsymbol{\sigma}_{l,k}$ werden die unbekannten Deformationen und Schnittgrößen eines Querschnittsanteils l erfasst, wobei:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{l,k} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{l,x}(t_k) \\ \kappa_{l,y}(t_k) \\ \kappa_{l,z}(t_k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{l,k} = \begin{bmatrix} N_{l,x}(t_k) \\ M_{l,y}(t_k) \\ M_{l,z}(t_k) \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen \mathbf{a}_e und \mathbf{a}_k sind algebraische Operatoren, die den Gleichgewichtsbedingungen bzw. den Verträglichkeitsbedingungen am Querschnitt zugeordnet sind und die Eigenschaft haben, daß sie sich durch Transponieren ineinander überführen lassen.

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_k^T \quad (5.4.2-12)$$

Durch die Vektoren \mathbf{s}_k und \mathbf{q}_k werden die Schnittgrößen bzw. die Deformationen des Gesamtquerschnitts beschrieben.

5.4.3 Aufbereitung des Materialgesetzes für die Querschnittsberechnung

Die Spannungen an der Stelle f, g in jedem beliebigen Querschnittsanteil l zu jedem Zeitpunkt t_i lassen sich durch die lineare Beziehung:

$$\sigma_{l,xf,g}(t_i) = \frac{N_{l,x}(t_i)}{A_l(t_i)} + \frac{M_{l,y}(t_i)}{I_{l,y}(t_i)} z_{lg} + \frac{M_{l,z}(t_i)}{I_{l,z}(t_i)} y_{lf} \quad (5.4.3-1)$$

berechnen. Die Verträglichkeitsbedingungen an der Stelle f, g für den Querschnittsanteil ergeben sich analog zu den Gln.(5.4.2-1..3):

$$\varepsilon_{l,xf,g}(t_i) = \varepsilon_{l,x}(t_i) + \kappa_{l,y}(t_i) \cdot z_{lg} + \kappa_{l,z}(t_i) \cdot y_{lf}, \quad (5.4.3-2)$$

$$\kappa_{l,yf,g}(t_i) = \kappa_{l,y}(t_i), \quad (5.4.3-3)$$

$$\kappa_{l,zf,g}(t_i) = \kappa_{l,z}(t_i). \quad (5.4.3-4)$$

Nach Einsetzen von Gl.(5.4.3-1) in Gl.(4.2-24) erhält man die Gesamtdehnung in Abhängigkeit der Schnittgrößenanteile $N_{l,x}(t_k)$, $M_{l,y}(t_k)$, $M_{l,z}(t_k)$. Mit Berücksichtigung der Verträglichkeitsbedingung auf der linken Seite des Materialgesetzes und für $\varepsilon_v(t_k)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l,x}^{(j)}(t_k) + \kappa_{l,y}^{(j)}(t_k) \cdot z_{lg} + \kappa_{l,z}^{(j)}(t_k) \cdot y_{lf} = & \left(\frac{N_{l,x}^{(j)}(t_k)}{A_l(t_k)E_l(t_k)} + \frac{M_{l,y}^{(j)}(t_k)}{I_{l,y}(t_k)E_l(t_k)} z_{lg} + \frac{M_{l,z}^{(j)}(t_k)}{I_{l,z}(t_k)E_l(t_k)} y_{lf} \right) \Phi_{lk,k}^{(j-1)} + \\ & \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{N_{l,x}(t_i) \cdot \Phi_{lk,i}^{(j-1)}}{A_l(t_i)E_l(t_i)} + \frac{M_{l,y}(t_i) \cdot \Phi_{lk,i}^{(j-1)}}{I_{l,y}(t_i)E_l(t_i)} z_{lg} + \frac{M_{l,z}(t_i) \cdot \Phi_{lk,i}^{(j-1)}}{I_{l,z}(t_i)E_l(t_i)} y_{lf} \right) + \\ & \varepsilon_{l,xv}(t_k) + \kappa_{l,yv}(t_k) \cdot z_{lg} + \kappa_{l,zv}(t_k) \cdot y_{lf} \end{aligned} \quad (5.4.3-5)$$

Aus Gl.(5.4.3-5) folgt, daß sich der Gesamtverformungszustand eines Querschnittsanteils aus einem Dehnungsanteil und zwei Krümmungsanteilen zusammensetzt. Aufgrund der additiven Verknüpfung kann jeder Verformungsanteil gesondert behandelt werden. Dabei wird für die Berechnung der spannungsabhängige Hilfswerte $\Phi_{lk,i}^{(j-1)}$ von der Näherung ausgegangen, daß die Spannung über den jeweiligen Querschnittsanteil konstant ist. Der Fehler, der sich infolge dieser Annahme einstellt, ist, daß für jede Faser eines Querschnittsanteils die gleiche Beschleunigung des Kriechprozesses angenommen wird. Durch eine relativ feine Diskretisierung des Gesamtquerschnitts läßt sich der Fehler in geringen Grenzen halten, da aufgrund der kleinen Abmessungen eines Querschnittsanteils auch die Spannungsdifferenzen sehr gering sind. Nach Zerlegung von Gl.(5.4.3-5) in die einzelnen Verformungsanteile erhält man für den Querschnittsanteil l folgende N - ε - bzw. M - κ - Beziehungen.

$$\varepsilon_{l,x}^{(j)}(t_k) = \frac{N_{l,x}^{(j)}(t_k)}{A_l(t_k)E_l(t_k)} \Phi_{lk,k}^{(j-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N_{l,x}(t_i)}{A_l(t_i)E_l(t_i)} \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \varepsilon_{l,xv}(t_k) \quad (5.4.3-6)$$

$$\kappa_{l,y}^{(j)}(t_k) = \frac{M_{l,y}^{(j)}(t_k)}{I_{l,y}(t_k)E_l(t_k)} \Phi_{lk,k}^{(j-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M_{l,y}(t_i)}{I_{l,y}(t_i)E_l(t_i)} \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \kappa_{l,yv}(t_k) \quad (5.4.3-7)$$

$$\kappa_{l,z}^{(j)}(t_k) = \frac{M_{l,z}^{(j)}(t_k)}{I_{l,z}(t_k)E_l(t_k)} \Phi_{lk,k}^{(j-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M_{l,z}(t_i)}{I_{l,z}(t_i)E_l(t_i)} \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \kappa_{l,zv}(t_k) \quad (5.4.3-8)$$

Zum Zweck der besseren Übersichtlichkeit werden die konstitutiven Beziehungen in Matrizenschreibweise formuliert. Diese Schreibweise ermöglicht die Zusammenfassung aller in einem diskreten Querschnitt definierten Querschnittsanteile, so daß geschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k^{(j)} = \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{c}_k^{(j-1)}. \quad (5.4.3-9)$$

Dabei weist der Index k auf die Nummer des Zeitpunkts, der Kopfzeiger j auf die Nummer der Iteration hin. In ihrer ausgeschriebenen Form lautet die Materialgleichung:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,k}^{(j)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{l,k}^{(j)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{r,k}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1,k}^{(j-1)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{f}_{l,k}^{(j-1)} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \mathbf{f}_{r,k}^{(j-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{1,k}^{(j)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{l,k}^{(j)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\sigma}_{r,k}^{(j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1,k}^{(j-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{l,k}^{(j-1)} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{r,k}^{(j-1)} \end{bmatrix},$$

wobei die Beziehungen für die Untermatrizen und -vektoren in Tafel 5.4.3-1 zusammengestellt sind.

| | |
|--|---|
| <p>Vektor der unbekannten Deformationen des Querschnittsanteils l</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{l,k}^{(j)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{l,x}^{(j)}(t_k) \\ \kappa_{l,y}^{(j)}(t_k) \\ \kappa_{l,z}^{(j)}(t_k) \end{bmatrix}$ | <p>Flexibilitätsmatrix des Querschnittsanteils l</p> $\mathbf{f}_{l,k}^{(j-1)} = \begin{bmatrix} \frac{\Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{A_l(t_k)E_l(t_k)} & & 0 \\ & \frac{\Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{I_{l,y}(t_k)E_l(t_k)} & \\ 0 & & \frac{\Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{I_{l,z}(t_k)E_l(t_k)} \end{bmatrix}$ |
| <p>Vektor der unbekannten Schnittgrößenanteile</p> $\boldsymbol{\sigma}_{l,k}^{(j)} = \begin{bmatrix} N_{l,x}^{(j)}(t_k) \\ M_{l,y}^{(j)}(t_k) \\ M_{l,z}^{(j)}(t_k) \end{bmatrix}$ | <p>Vektor der Kriech-, Schwind- und Vorverformung</p> $\mathbf{c}_{l,k}^{(j-1)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N_{l,x}(t_i)}{A_l(t_i)E_l(t_i)} \cdot \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \varepsilon_{l,xv}(t_k) \\ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M_{l,y}(t_i)}{I_{l,y}(t_i)E_l(t_i)} \cdot \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \kappa_{l,yv}(t_k) \\ \sum_{i=0}^{k-1} \frac{M_{l,z}(t_i)}{I_{l,z}(t_i)E_l(t_i)} \cdot \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \kappa_{l,zv}(t_k) \end{bmatrix}$ |

Tafel 5.4.3-1: Untermatrizen und -vektoren

5.4.4 Modell zur Berechnung querschnittsinterner Spannungsumlagerungen im Zustand I

Aus dem Materialgesetz Gl.(5.4.3-9) läßt sich für jeden Betrachtungszeitpunkt t_k im Zusammenhang mit den Gleichgewichtsbedingungen Gl.(5.4.2-10) und den Verträglichkeitsbedingungen Gl.(5.4.2-11) folgendes lineares Gleichungssystem zur Ermittlung der unbekannten Schnittgrößenanteile $\sigma_k^{(j)}$ und Querschnittsdeformationen $q_k^{(j)}$ aufstellen:

$$\mathbf{f}_k^{(j-1)} \sigma_k^{(j)} - \mathbf{a}_k q_k^{(j)} + \mathbf{c}_k^{(j-1)} = 0 \quad (5.4.4-1)$$

$$-\mathbf{a}_e \sigma_k^{(j)} + \mathbf{s}_k = 0.$$

Der Vektor der Schnittgrößen des Gesamtquerschnitts \mathbf{s}_k wird dabei als bekannt vorausgesetzt.

Die Abarbeitung des Problems erfordert eine sukzessive Vorgehensweise, wobei die einzelnen Zeitschritte in ihrer zeitlichen Reihenfolge nacheinander zu betrachten sind, da die Ergebnisse der vorangegangenen Zeitschritte in die Berechnung des jeweiligen aktuellen Zeitschritts eingehen. Nach Bereitstellung der Problem Matrizen kann die eigentliche Berechnung der unbekannten Größen mit Hilfe geeigneter numerischer Lösungsverfahren (lineare Gleichungslöser) erfolgen.

Ein alternatives Verfahren zur Berechnung querschnittsinterner Spannungsumlagerungen läßt sich auf Grundlage des in Abschn. 5.4.1 hergeleiteten Extremalprinzips finden. Die sukzessive Vorgehensweise wird dabei beibehalten, die Berechnung der unbekannten Schnittgrößenanteile und Querschnittsdeformationen wird jedoch auf die Ermittlung des Extremwertes einer Zielfunktion mit linearen Nebenbedingungen zurückgeführt.

Ausgangspunkt für die Ableitung des Berechnungsverfahrens ist das Extremalprinzip Gl.(5.4.1-1) mit den Nebenbedingungen Gln.(5.4.1-2..4). Nach Ausführen der Integration über die Querschnittsfläche entsteht unter Berücksichtigung der Abschnitte 5.4.2 und 5.4.3:

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \int_x \sigma_k^{(j)T} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \sigma_k^{(j)} dx + \int_x \sigma_k^{(j)T} \mathbf{c}_k^{(j-1)} dx \Rightarrow \text{Minimum}, \quad (5.4.4-2)$$

woraus man durch Weglassen der Integration über die Stablängsachse x die Optimierungsaufgabe für diskrete Querschnittsprobleme erhält. Da die statischen Randbedingungen bei der Betrachtung von Querschnittsproblemen keinen Einfluß auf die Berechnung haben und die Plastizitätsbedingungen unter der Voraussetzung, daß Zustand I vorliegt und keine weiteren Plastizierungen auftreten, nicht aktiv werden, bleiben lediglich die Gleichgewichtsbedingungen als zu erfüllende Nebenbedingungen übrig.

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \sigma_k^{(j)T} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \sigma_k^{(j)} + \sigma_k^{(j)T} \mathbf{c}_k^{(j-1)} \Rightarrow \text{Minimum} \quad (5.4.4-3)$$

$$-\mathbf{a}_e \sigma_k^{(j)} + \mathbf{s}_k = 0$$

Es kann nun gezeigt werden, daß sich das lineare Gleichungssystem durch die quadratische Optimierungsaufgabe äquivalent ersetzen läßt. Zu diesem Zweck wird die zu der quadratischen Optimierungsaufgabe zugehörige Lagrangefunktion gebildet:

$$L^{(j)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{c}_k^{(j-1)} + \boldsymbol{\lambda}_k^{(j)T} (-\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{s}_k) \Rightarrow \text{stationär}, \quad (5.4.4-3)$$

wobei der Vektor der Lagrangemultiplikatoren

$$\boldsymbol{\lambda}_k^{(j)} = \begin{bmatrix} \lambda_1(t_k) \\ \lambda_2(t_k) \\ \lambda_3(t_k) \end{bmatrix}$$

zunächst unbekannt ist. Aufgrund der Konvexität der Optimierungsaufgabe (5.4.4-2) befindet sich der globale optimale Punkt am einzigen Sattelpunkt der zugehörigen Lagrangefunktion, deren partielle Differentiation nach den unbekannten Schnittgrößenanteilen und den Lagrangemultiplikatoren die Beziehungen:

$$\frac{\partial L^{(j)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)}} = \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{c}_k^{(j-1)} - \mathbf{a}_e^T \boldsymbol{\lambda}_k^{(j)} \quad (5.4.4-4)$$

$$\frac{\partial L^{(j)}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_k^{(j)}} = -\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{s}_k$$

liefert. Da nach Abschnitt 5.3 die partiellen ersten Ableitungen nach den unbekannten Größen am Sattelpunkt Null werden müssen und der Zusammenhang $\mathbf{a}_e^T = \mathbf{a}_k$ gilt, ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem zur Ermittlung des Sattelpunktes:

$$\mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{c}_k^{(j-1)} - \mathbf{a}_k \boldsymbol{\lambda}_k^{(j)} = 0 \quad (5.4.4-5)$$

$$-\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{s}_k = 0.$$

Wegen der Materialbeziehung Gl.(5.4.3-9) und der Verträglichkeitsbedingung Gl.(5.4.2-11) folgt aus der ersten Gleichung des Gleichungssystems, daß der Vektor der Lagrange-multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_k^{(j)}$ dem Vektor der Deformationen des Gesamtquerschnitts $\mathbf{q}_k^{(j)}$ entspricht.

Aufgrund der Identität der Beziehungen (5.4.4-1) und (5.4.4-5) ist die Gleichwertigkeit der quadratischen Optimierungsaufgabe mit dem linearen Gleichungssystem (5.4.4-1) gegeben. Die Struktur der Optimierungsaufgabe für den Zeitpunkt t_k und die j -te Iteration ist in Tafel 5.4.4-1 angegeben.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|-------------------|---|---|---|----------|---|---|---|----------|---|---|--------------------------------|---------------|------------|--|--|
| | | $N_{1,x,k}^{(j)}$ | $M_{1,y,k}^{(j)}$ | $M_{1,z,k}^{(j)}$ | ... | $N_{l,x,k}^{(j)}$ | $M_{l,y,k}^{(j)}$ | $M_{l,z,k}^{(j)}$ | ... | $N_{r,x,k}^{(j)}$ | $M_{r,y,k}^{(j)}$ | $M_{r,z,k}^{(j)}$ | | | | |
| | | $\mathbf{c}_{1,k,N_x}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{1,k,M_y}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{1,k,M_z}^{(j-1)}$ | ... | $\mathbf{c}_{l,k,N_x}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{l,k,M_y}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{l,k,M_z}^{(j-1)}$ | ... | $\mathbf{c}_{r,k,N_x}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{r,k,M_y}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{r,k,M_z}^{(j-1)}$ | | | | |
| ZF | $N_{1,x,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{l,k,k}^{(j-1)}}{A_{l,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | | | | \Rightarrow | Min. | | |
| | $M_{1,y,k}^{(j)}$ | | $\frac{\Phi_{l,k,k}^{(j-1)}}{I_{l,y,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | $M_{1,z,k}^{(j)}$ | | | $\frac{\Phi_{l,k,k}^{(j-1)}}{I_{l,z,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | | | | | |
| | \vdots | | | | \ddots | | | | | | | | | | | |
| | $N_{l,x,k}^{(j)}$ | | | | | $\frac{\Phi_{l,k,k}^{(j-1)}}{A_{l,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | | | |
| | $M_{l,y,k}^{(j)}$ | | | | | | $\frac{\Phi_{l,k,k}^{(j-1)}}{I_{l,y,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | | |
| | $M_{l,z,k}^{(j)}$ | | | | | | | $\frac{\Phi_{l,k,k}^{(j-1)}}{I_{l,z,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | |
| | \vdots | | | | | | | | \ddots | | | | | | | |
| | $N_{r,x,k}^{(j)}$ | | | | | | | | | $\frac{\Phi_{r,k,k}^{(j-1)}}{A_{r,k}E_{r,k}}$ | | | | | | |
| | $M_{r,y,k}^{(j)}$ | | | | | | | | | | $\frac{\Phi_{r,k,k}^{(j-1)}}{I_{r,y,k}E_{r,k}}$ | | | | | |
| $M_{r,z,k}^{(j)}$ | | | | | | | | | | | $\frac{\Phi_{r,k,k}^{(j-1)}}{I_{r,z,k}E_{r,k}}$ | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| GGB | | -1 | 0 | 0 | ... | -1 | 0 | 0 | ... | -1 | 0 | 0 | = | $N_x(t_k)$ | | |
| | | $-z_1$ | -1 | 0 | ... | $-z_l$ | -1 | 0 | ... | $-z_r$ | -1 | 0 | = | $M_y(t_k)$ | | |
| | | $-y_1$ | 0 | -1 | ... | $-y_l$ | 0 | -1 | ... | $-y_r$ | 0 | -1 | = | $M_z(t_k)$ | | |

Tafel 5.4.4-1: Struktur der quadratischen Optimierungsaufgabe zur Ermittlung querschnittsinterner Spannungumlagerungen im Zustand I

5.4.5 Behandlung der Rißbildung und Plastizierung

Das Berechnungsmodell läßt sich auf solche Probleme erweitern, bei denen die Rißbildung der Betonzugzone bzw. Plastizierung der Betondruckzone zu berücksichtigen sind.

Um das Materialverhalten der gerissenen Betonanteile richtig zu beschreiben, ist zunächst zu klären, aus welchen Anteilen sich die Deformationen im Riß zusammensetzen.

Die Aufteilung der Gesamtdeformation im Riß läßt sich leicht anhand der zeitabhängigen Spannungs- und Dehnungsentwicklung eines unbewehrten Betonquerschnitts veranschaulichen (Tafel 5.4.5-1), da sich unter der zusätzlichen Voraussetzung der Gültigkeit der linearen Kriechtheorie keine Spannungumlagerungen einstellen und somit die Nulllinienlage und die Schnittgrößenanteile über den Gesamtzeitraum konstant sind. Bei der Betrachtung der Verformung im Riß ist es notwendig, das Materialgesetz des Betons um die plastischen Anteile $\varepsilon_{l,Ri\beta}(t_i)$ und $\kappa_{l,Ri\beta}(t_i)$ zu erweitern, da sonst die Verträglichkeit der Verformungen im Riß mit den Querschnittsdeformationen verletzt wird. Zum Zeitpunkt des Belastungsbeginns t_1 ist die Gesamtverformung eines Querschnittsanteils außerhalb des Risses mit der zugehörigen elastischen Verformung und im Riß mit den zugehörigen plastischen Anteilen identisch.

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems zu einem beliebigen Zeitpunkt t_2 erhält man die Bestimmungsgleichungen für die Gesamtdeformationen im Riß (siehe Tafel 5.4.5-1).

$$\kappa_{2y}(t_2) = \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2)z_1}{E_1 I_1} \Phi_{12,2} + \frac{M_y(t_1) - N_x(t_1)z_1}{E_1 I_1} \Phi_{12,1} \quad (5.4.5-1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2x}(t_2) = & \frac{N_x(t_2)}{E_1 A_1} \Phi_{12,2} + \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2)z_1}{E_1 I_1} \Phi_{12,2} (z_2 - z_1) + \\ & \frac{N_x(t_1)}{E_1 A_1} \Phi_{12,1} + \frac{M_y(t_1) - N_x(t_1)z_1}{E_1 I_1} \Phi_{12,1} (z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (5.4.5-2)$$

Mit den N - ε - bzw. M - κ -Beziehungen des Zeitpunktes t_1 bei Belastungsbeginn

$$\frac{N_x(t_1)}{E_1 A_1} = \varepsilon_x(t_1) + \kappa_y(t_1)z_1 \quad (5.4.5-3)$$

$$\frac{M_y(t_1) - N_x(t_1)z_1}{E_1 I_1} = \kappa_y(t_1) \quad (5.4.5-4)$$

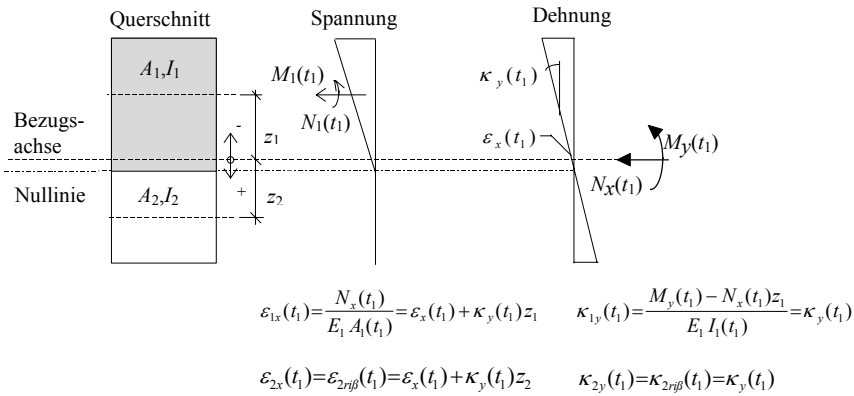
und unter der Voraussetzung, daß sich die $\Phi_{lk,i}$ -Werte auf Grundlage der linearen Kriechtheorie ermitteln lassen und damit für alle Querschnittsanteile l gleich sind, lauten die Bestimmungsgleichungen:

$$\kappa_{2y}(t_2) = \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2)z_1}{E_1 I_1} \Phi_{12,2} + \kappa_y(t_1) \Phi_{22,1} \quad (5.4.5-5)$$

$$\varepsilon_{2x}(t_2) = \left[\frac{N_x(t_2)}{E_1 A_1} + \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2)z_1}{E_1 I_1} (z_2 - z_1) \right] \Phi_{12,2} + [\varepsilon_x(t_1) + \kappa_y(t_1)z_2] \Phi_{22,1} \quad (5.4.5-6)$$

Aus der Struktur der Bestimmungsgleichungen wird deutlich, daß sich die Gesamtdeformationen im Riß aus zwei Anteilen zusammensetzen.

1) Spannungs- und Dehnungsverteilung zum Zeitpunkt t_1



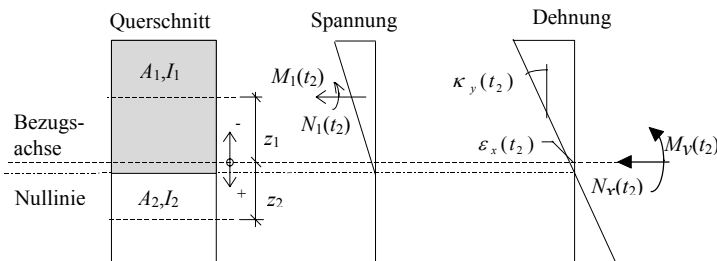
2) Aufstellen des linearen Gleichungssystems (5.4.4-1) für den Zeitpunkt t_2

$$\frac{N_1(t_2)}{E_1 A_1} \Phi_{1,2,2} + \frac{N_1(t_1)}{E_1 A_1} \Phi_{1,2,1} - \varepsilon_x(t_2) - \kappa_y(t_2) z_1 = 0 \quad \varepsilon_{2x}(t_2) - \varepsilon_x(t_2) - \kappa_y(t_2) z_2 = 0$$

$$\frac{M_1(t_2)}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,2} + \frac{M_1(t_1)}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,1} - \kappa_y(t_2) = 0 \quad \kappa_{2x}(t_2) - \kappa_y(t_2) = 0$$

$$-N_1(t_2) - N_2(t_2) + N_x(t_2) = 0 \quad -N_1(t_2) z_1 - M_1(t_2) - N_2(t_2) z_2 - M_2(t_2) + M_y(t_2) = 0$$

3) Spannungs- und Dehnungsverteilung zum Zeitpunkt t_2



4) Lösen des linearen Gleichungssystems

$$N_2(t_2) = 0, \quad M_2(t_2) = 0$$

$$N_1(t_2) = N_x(t_2), \quad M_1(t_2) = M_y(t_2) - N_x(t_2) z_1$$

$$\kappa_y(t_2) = \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2) z_1}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,2} + \frac{M_y(t_1) - N_x(t_1) z_1}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,1}$$

$$\varepsilon_x(t_2) = \frac{N_x(t_2)}{E_1 A_1} \Phi_{1,2,2} + \frac{N_x(t_1)}{E_1 A_1} \Phi_{1,2,1} - \left(\frac{M_y(t_2) - N_x(t_2) z_1}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,2} + \frac{M_y(t_1) - N_x(t_1) z_1}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,1} \right) z_1$$

$$\kappa_{2y}(t_2) = \kappa_y(t_2) = \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2) z_1}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,2} + \frac{M_y(t_1) - N_x(t_1) z_1}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,1}$$

$$\varepsilon_{2x}(t_2) = \frac{N_x(t_2)}{E_1 A_1} \Phi_{1,2,2} + \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2) z_1}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,2} (z_2 - z_1) + \frac{N_x(t_1)}{E_1 A_1} \Phi_{1,2,1} + \frac{M_y(t_1) - N_x(t_1) z_1}{E_1 I_1} \Phi_{1,2,1} (z_2 - z_1)$$

Tafel 5.4.5-1: Zeitabhängige Spannungs- und Dehnungsverteilung eines unbewehrten Betonquerschnitts im Zustand II

Durch den jeweils ersten Anteil wird die Dehnung bzw. Krümmung erfaßt, die sich aufgrund der elastischen Deformation des Gesamtquerschnitts zum aktuellen Betrachtungszeitpunkt unter Berücksichtigung der Verträglichkeitsbedingungen einstellt. Dieser Anteil ist im Normalfall von vornherein nicht bekannt und geht somit als unbekannte Größe in das Gleichungssystem ein. Infolge des Fehlers, den die Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung bei der Diskretisierung des Gesamtzeitraums mit sich bringt, ist in dem ersten Anteil zusätzlich ein Teil der Kriechdeformation enthalten. Verantwortlich dafür ist der Multiplikator $\Phi_{l,k,k}$, durch den das Kriechen im letzten Zeitschritt infolge einer zum vorletzten Zeitpunkt t_{k-1} aufgetragenen Spannungsänderung anteilig erfaßt wird.

Der jeweils zweite Anteil der Bestimmungsgleichungen beschreibt die zeitabhängigen Deformationen des gerissenen Anteils, die sich aus dem Kriechen des Gesamtquerschnitts ergeben. Dabei ist zu beachten, daß der Beton im Riß selbst nicht kriecht. Die zeitabhängigen Deformationen im Riß stellen lediglich die Verträglichkeit der Verformungen im Riß mit den Verformungen am Gesamtquerschnitt her, so daß die Voraussetzung des Ebenbleibens der Querschnitte auch nach Ablauf des Kriechprozesses nicht verletzt wird.

Mit den Beziehungen:

$$\kappa_{2Ri\beta}(t_1) = \kappa_y(t_1), \quad (5.4.5-7a)$$

$$\kappa_{2Ri\beta}(t_2) = \kappa_{1ye}(t_2) = \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2)z_1}{E_1 I_1}, \quad (5.4.5-7b)$$

$$\varepsilon_{2Ri\beta}(t_1) = \varepsilon_x(t_1) + \kappa_y(t_1)z_1, \quad (5.4.5-7c)$$

$$\varepsilon_{2Ri\beta}(t_2) = \varepsilon_{xe}(t_2) + \kappa_{ye}(t_2)z_2 = \frac{N_x(t_2)}{E_1 A_1} + \frac{M_y(t_2) - N_x(t_2)z_1}{E_1 I_1}(z_2 - z_1), \quad (5.4.5-7d)$$

lassen sich die Gesamtverformungen im Riß folgendermaßen angeben:

$$\kappa_{2y}(t_2) = \kappa_{2Ri\beta}(t_2)\Phi_{1\,2,2} + \kappa_{2Ri\beta}(t_1)\Phi_{2\,2,1}, \quad (5.4.5-8)$$

$$\varepsilon_{2x}(t_2) = \varepsilon_{2Ri\beta}(t_2)\Phi_{1\,2,2} + \varepsilon_{2Ri\beta}(t_1)\Phi_{2\,2,1}. \quad (5.4.5-9)$$

Dabei stellen die mit dem Index e versehenen Größen $\varepsilon_{l,xe}(t_i)$ und $\kappa_{l,ye}(t_i)$ die elastischen Deformationen des Querschnittsanteils l zum jeweiligen Zeitpunkt t_i dar. Die Variablen $\varepsilon_{l,Ri\beta}(t_i)$ und $\kappa_{l,Ri\beta}(t_i)$ beschreiben die den „elastischen“ Verformungen des Gesamtquerschnitts zum Zeitpunkt t_i zugeordneten Dehnungs- und Krümmungsanteile. Die „elastischen“ Verformungen des Gesamtquerschnitts setzen sich aus elastischen und plastischen Deformationsanteilen zusammen, und sind als die Verformungen definiert, die nicht durch das Kriechen und Schwinden des Betons hervorgerufen werden.

Im Ergebnis dieser Betrachtung wird deutlich, daß das Materialgesetz Gl.(5.4.3-9) das zeitabhängige Verformungsverhalten gerissener Querschnittsanteile, die sich im Verbund mit ungerissenen Querschnittsanteilen befinden, nicht vollständig beschreibt. Unter Beachtung von Gl.(5.4.5-8) und Gl.(5.4.5-9) ist die Beziehung Gl.(5.4.4-1) um einen plastischen Anteil des aktuellen Zeitpunkts und um die plastischen Anteile der vorausgehenden Zeitpunkte zu erweitern.

Die Berücksichtigung der plastischen Anteile der vorausgehenden Zeitpunkte erfolgt innerhalb des Materialgesetzes. Dazu werden folgende Beziehungen eingeführt:

$$\varepsilon_{l,xel}(t_i) = \frac{N_{l,x}(t_i)}{A_l(t_i)E_l(t_i)} + \varepsilon_{l,x Ri\beta}(t_i), \quad (5.4.5-10)$$

$$\kappa_{l,yel}(t_i) = \frac{M_{l,y}(t_i)}{I_{l,y}(t_i)E_l(t_i)} + \kappa_{l,y Ri\beta}(t_i), \quad (5.4.5-11)$$

$$\kappa_{l,zel}(t_i) = \frac{M_{l,z}(t_i)}{I_{l,z}(t_i)E_l(t_i)} + \kappa_{l,z Ri\beta}(t_i). \quad (5.4.5-12)$$

Damit kann der Untervektor $\mathbf{c}_{l,k}$ so modifiziert werden, daß gerissene und ungerissene Querschnittsanteile in gleicher Weise erfaßt werden.

$$\mathbf{c}_{l,k} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_{l,xel}(t_i) \Phi_{lk,i} + \varepsilon_{l,xv}(t_k) \\ \sum_{i=0}^{k-1} \kappa_{l,yel}(t_i) \Phi_{lk,i} + \kappa_{l,yv}(t_k) \\ \sum_{i=0}^{k-1} \kappa_{l,zel}(t_i) \Phi_{lk,i} + \kappa_{l,zv}(t_k) \end{bmatrix} \quad (5.4.5-13)$$

Die Deformationen $\varepsilon_{l,xel}(t_k)$, $\kappa_{l,yel}(t_k)$ und $\kappa_{l,zel}(t_k)$ lassen sich im Anschluß an die Berechnung des aktuellen Zeitschritts t_k aus den Deformationen des Gesamtquerschnitts ermitteln und stellen damit für den nachfolgenden Zeitschritt eine bekannte Größe dar.

$$\varepsilon_{l,xel}(t_k) = \frac{1}{\Phi_{lk,k}} \left[\varepsilon_x(t_k) + \kappa_y(t_k)z_l + \kappa_z(t_k)y_l - \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_{l,xel}(t_i) \Phi_{lk,i} - \varepsilon_{l,xv}(t_k) \right] \quad (5.4.5-14)$$

$$\kappa_{l,yel}(t_k) = \frac{1}{\Phi_{lk,k}} \left[\kappa_y(t_k) - \sum_{i=0}^{k-1} \kappa_{l,yel}(t_i) \Phi_{lk,i} - \kappa_{l,yv}(t_k) \right] \quad (5.4.5-15)$$

$$\kappa_{l,zel}(t_k) = \frac{1}{\Phi_{lk,k}} \left[\kappa_z(t_k) - \sum_{i=0}^{k-1} \kappa_{l,zel}(t_i) \Phi_{lk,i} - \kappa_{l,zv}(t_k) \right]. \quad (5.4.5-16)$$

Die Beschreibung der plastischen Deformationen des aktuellen Zeitschritts erweist sich als wesentlich komplizierter, da der Verformungszustand des Gesamtquerschnitts erst aus der Berechnung des Zeitschritts selbst hervorgeht und im allgemeinen von vornherein nicht bekannt ist, welche Querschnittsanteile gerissen sind und welche sich im ungerissenen Zustand befinden.

Der Einsatz der mathematischen Optimierung als Lösungsalgorithmus erlaubt eine effektive Behandlung des Problems, indem zusätzlich zu den Gleichungsbedingungen Ungleichungsbedingungen in Form von Spannungsbegrenzungen bzw. Schnittgrößenbegrenzungen (Plastizitätsbedingungen) eingeführt werden. Eine weitere Voraussetzung für die Beschreibung der Rißbildung ist die Anwendung eines Schichten- bzw. Fasermodells, wobei

eine relativ feine Einteilung des Querschnitts im Bereich der zu erwartenden Nulllinienlage für eine genügend genaue Beschreibung des gerissenen Bereiches notwendig ist. Nach Einführung der Plastizitätsbedingungen lautet die vollständige Optimierungsaufgabe:

Zielfunktion:
$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{c}_k^{(j-1)} \Rightarrow \text{Minimum}$$

Gleichgewichtsbedingungen: $-\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{s}_k = 0 \quad (5.4.5-17)$

Plastizitätsbedingungen: $\mathbf{s}_{0,k}^{(-)} \leq \mathbf{a}_p \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} \leq \mathbf{s}_{0,k}^{(+)}$.

Der algebraische Operator \mathbf{a}_p beinhaltet dabei die Umrechnungsvorschrift für die Ermittlung von Eckspannungen der im Querschnitt zusammenwirkenden Querschnittsanteile l aus den zugehörigen Schnittgrößenanteile $N_{l,x}(t_k)$, $M_{l,y}(t_k)$ und $M_{l,z}(t_k)$ nach Gl.(5.4.3-1), so daß aufgrund der Linearität der Plastizitätsbedingungen die Konvexität des Optimierungsproblems erhalten bleibt.

$$\mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1,p} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{a}_{l,p} & \\ 0 & & & \ddots & \mathbf{a}_{r,p} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_{l,p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_l(t_k)} & \frac{z_{l,ob}}{I_{l,y}(t_k)} & \frac{y_{l,li}}{I_{l,z}(t_k)} \\ \frac{1}{A_l(t_k)} & \frac{z_{l,ob}}{I_{l,y}(t_k)} & \frac{y_{l,re}}{I_{l,z}(t_k)} \\ \frac{1}{A_l(t_k)} & \frac{z_{l,un}}{I_{l,y}(t_k)} & \frac{y_{l,li}}{I_{l,z}(t_k)} \\ \frac{1}{A_l(t_k)} & \frac{z_{l,un}}{I_{l,y}(t_k)} & \frac{y_{l,re}}{I_{l,z}(t_k)} \end{bmatrix}.$$

Die Vektoren $\mathbf{s}_{0,k}^{(-)}$ und $\mathbf{s}_{0,k}^{(+)}$ enthalten die unteren und oberen Grenzspannungen aller Querschnittsanteile zum Betrachtungszeitpunkt t_k . Jedem Querschnittsanteil können somit verschiedene Grenzspannungswerte zugeordnet werden.

Die Rißbildung des Betons kann berücksichtigt werden, indem der obere Grenzspannungswert der Betonquerschnittsanteile mit dem Wert 0 belegt wird. Damit wird eine Mitwirkung des Betons auf Zug von vornherein ausgeschlossen. Die Nulllinienlage ergibt sich automatisch, so daß explizite Iterationen zur Suche der Nulllinie nicht notwendig sind.

Die Ableitung der der Optimierungsaufgabe (5.4.5-17) zugeordneten Lagrangefunktion nach dem Vektor der unbekannten Schnittgrößenanteile zum Zeitpunkt t_k liefert nach anschließendem Nullsetzen die kinematische Beziehung

$$\mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{c}_k^{(j-1)} + \mathbf{a}_p \boldsymbol{\lambda}_p^{(j)} - \mathbf{a}_k \boldsymbol{\lambda}_k^{(j)} = 0, \quad (5.4.5-18)$$

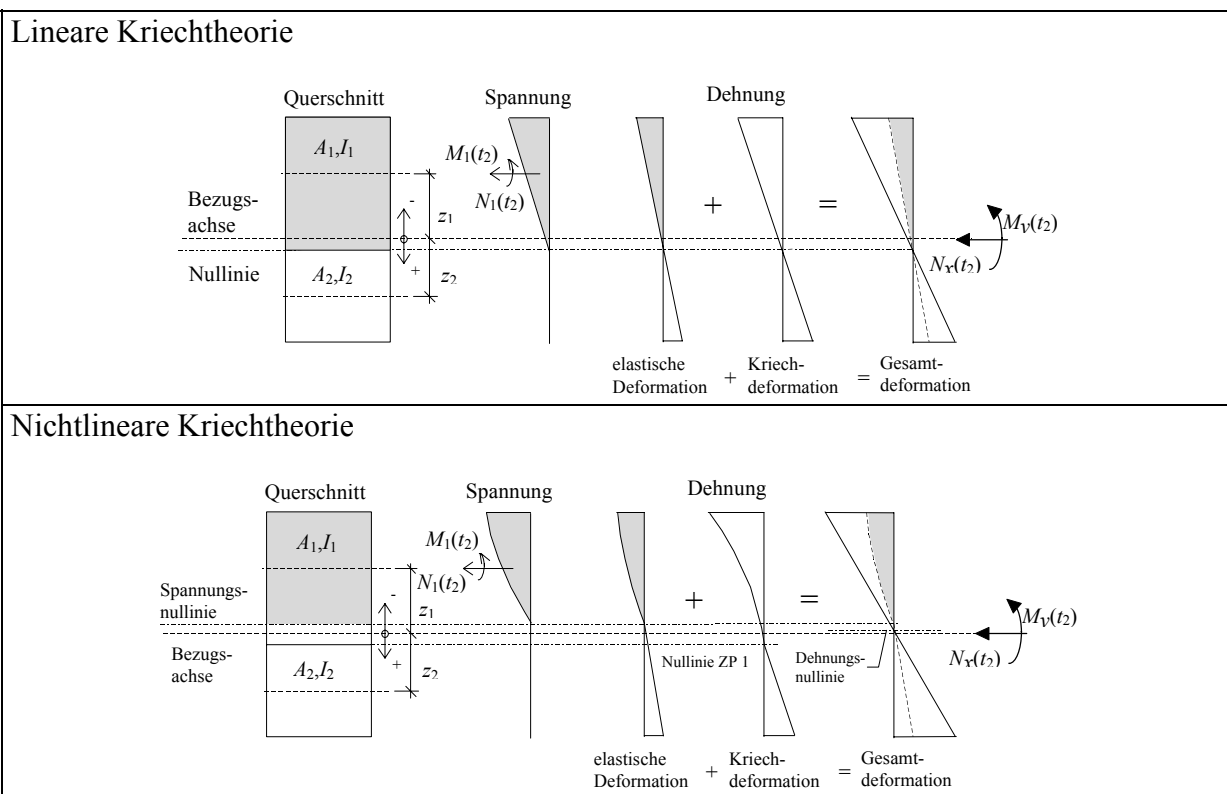
wobei der Vektor $\boldsymbol{\lambda}_k^{(j)}$ wie schon im vorangegangenen Abschnitt dem Vektor der Deformationen des Gesamtquerschnitts $\mathbf{q}_k^{(j)}$ identisch ist. Der den Plastizitätsbedingungen zugeordnete Lagrangeparameter $\boldsymbol{\lambda}_p^{(j)}$ ist nur dann von Null verschieden, wenn der zugehörige Querschnittsanteil seine maximale oder minimale Grenzspannung erreicht. Im

Zusammenhang mit dem Operator \mathbf{a}_p werden dadurch die plastischen Verformungen der betroffenen Querschnittsanteile des aktuellen Zeitschritts beschrieben.

Bei der Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens wird davon ausgegangen, daß die zeitabhängigen Verformungen im Riß durch Multiplikation der plastischen Deformationsanteile mit einem linearen, d.h. spannungsunabhängigen, Kriechparameter $\Phi_{lk,i}$ beschrieben werden können. Aus dieser Annahme und dem stärkeren Anwachsen der Querschnittsdeformationen im Vergleich zur linearen Kriechtheorie, folgt, daß sich die Nichtlinearität des Kriechens nur auf den Deformationsanteil im Riß auswirkt, der sich infolge der elastischen Deformation des Gesamtquerschnitts einstellt.

In Tafel 5.4.5-2 sind die Spannungs- und Dehnungsverteilung eines unbewehrten Betonquerschnitts bei Anwendung linearer und nichtlinearer Kriechtheorie unter Berücksichtigung der Rißbildung des Betons dargestellt.

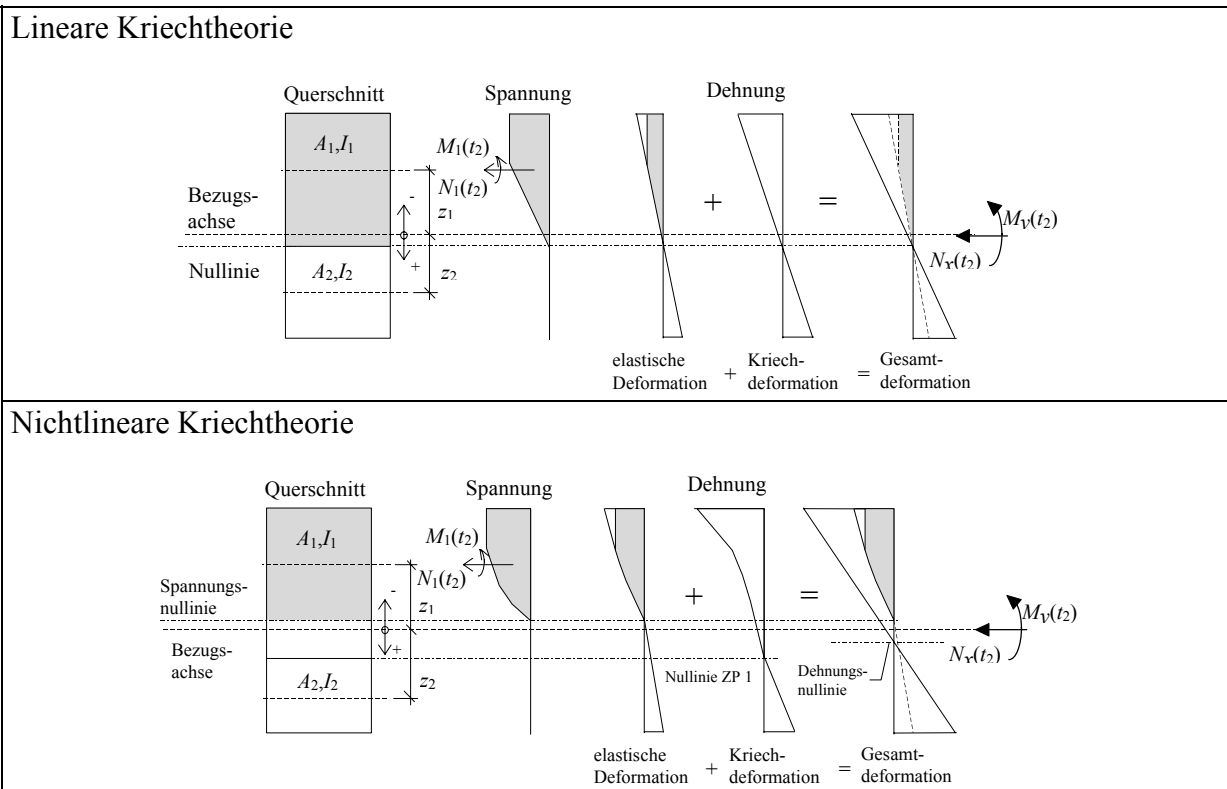
Die nichtlineare Spannungsverteilung in der Betondruckzone bei nichtlinearer Kriechtheorie ergibt sich aus dem nichtlinearen Anwachsen der Kriechgeschwindigkeit zu den stärker beanspruchten Randfasern hin. Da durch die Voraussetzung ebener Querschnitte eine lineare Gesamtdehnungsverteilung über den Querschnitt erzwungen wird, ist ein linearer Zuwachs der elastischen Deformationen mit größer werdendem Abstand zur Nulllinie nicht mehr möglich. Aus den Beziehungen (5.4.5-10..12) erhält man die zu den elastischen Verformungen gehörenden Schnittgrößenanteile für jeden Querschnittsanteil, aus denen die nichtlineare Spannungsverteilung über den Querschnitt folgt. Dieser Effekt kann als Spannungsumlagerung von den stärker kriechenden zu den weniger stark kriechenden Betonfasern interpretiert werden, in deren Ergebnis eine Verschiebung der Nulllinienlage eintritt. Dabei fallen Spannungs- und Dehnungsnulllinie nicht mehr zusammen.



Tafel 5.4.5-2: Spannungsverteilung und Dehnungsanteile bei linearer und nichtlinearer Kriechtheorie unter Berücksichtigung der Rißbildung

Das Kriechen der plastizierten Druckzone wird in der gleichen Weise wie das Kriechen der gerissenen Zugzone behandelt, wobei sich die aus den elastischen Verformungen des Gesamtquerschnitts resultierenden Deformationen aus einem elastischen Deformationsanteil des Querschnittsanteils selbst und einem plastischen Deformationsanteil zusammensetzen. Der elastische Deformationsanteil ist dabei über das Elastizitätsgesetz an die erreichte Grenzspannung gekoppelt. Da den Querschnittsanteilen zu jedem Zeitpunkt unterschiedliche Grenzspannungen zugeordnet werden können, läßt sich die zeitabhängige Entwicklung der Betondruckfestigkeit auf einfache Weise berücksichtigen.

Aufgrund der Spannungsabhängigkeit der nichtlinearen Kriechfunktion ergibt sich für den gesamten plastischen Bereich der Betondruckzone der gleiche Kriechzahlerhöhungsfaktor, so daß der Zuwachs der Kriechdeformation in der plastizierten Zone von der der Nulllinie nächstgelegenen Faser bis zur Randfaser linear verläuft.



Tafel 5.4.5-3: Spannungsverteilung und Dehnungsanteile bei linearer und nichtlinearer Kriechtheorie unter Berücksichtigung der Rißbildung und Plastizierung der Druckzone

Die Plastizierung des Stahls läßt sich ebenfalls durch die Plastizitätsbedingungen berücksichtigen. Dabei ist je nachdem ob das Materialverhalten des Stahls durch eine bilineare Spannungsdehnungslinie beschrieben wird oder ob die Verfestigung nach Erreichen der Streckgrenze berücksichtigt werden soll (Beschreibung durch Ramberg-Osgood Polynom) die Streckgrenze des Stahls bzw. dessen Zugfestigkeit als Spannungsgrenzwert in den Vektoren $\mathbf{s}_{0,k}^{(-)}$ und $\mathbf{s}_{0,k}^{(+)}$ einzusetzen.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|----------------------|--|---|---|-----|--|---|---|---------------------------------|--|---|---|-----------------|------------|--|
| | | $N_{1,x,k}^{(j)}$ | $M_{1,y,k}^{(j)}$ | $M_{1,z,k}^{(j)}$ | ... | $N_{l,x,k}^{(j)}$ | $M_{l,y,k}^{(j)}$ | $M_{l,z,k}^{(j)}$ | ... | $N_{r,x,k}^{(j)}$ | $M_{r,y,k}^{(j)}$ | $M_{r,z,k}^{(j)}$ | | | |
| ZF | | $\mathbf{c}_{1,k,\varepsilon_{xel}}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{1,k,\kappa_{yel}}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{1,k,\kappa_{zel}}^{(j-1)}$ | ... | $\mathbf{c}_{l,k,\varepsilon_{xel}}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{l,k,\kappa_{yel}}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{l,k,\kappa_{zel}}^{(j-1)}$ | ... | $\mathbf{c}_{r,k,\varepsilon_{xel}}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{r,k,\kappa_{yel}}^{(j-1)}$ | $\mathbf{c}_{r,k,\kappa_{zel}}^{(j-1)}$ | \Rightarrow | Min. | |
| | $N_{1,x,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{1k,k}^{(j-1)}}{A_{1,k}E_{1,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | $M_{1,y,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{1k,k}^{(j-1)}}{I_{1,y,k}E_{1,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | $M_{1,z,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{1k,k}^{(j-1)}}{I_{1,z,k}E_{1,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | \vdots | \ddots | | | | | | | | | | | | | |
| | $N_{l,x,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{A_{l,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | $M_{l,y,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{I_{l,y,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | $M_{l,z,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{I_{l,z,k}E_{l,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | \vdots | \ddots | | | | | | | | | | | | | |
| | $N_{r,x,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{rk,k}^{(j-1)}}{A_{r,k}E_{r,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | $M_{r,y,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{rk,k}^{(j-1)}}{I_{r,y,k}E_{r,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| | $M_{r,z,k}^{(j)}$ | $\frac{\Phi_{rk,k}^{(j-1)}}{I_{r,z,k}E_{r,k}}$ | | | | | | | | | | | | | |
| GGB | | -1 | 0 | 0 | ... | -1 | 0 | 0 | ... | -1 | 0 | 0 | = | $N_x(t_k)$ | |
| | | $-z_l$ | -1 | 0 | ... | $-z_l$ | -1 | 0 | ... | $-z_r$ | -1 | 0 | = | $M_y(t_k)$ | |
| | | $-y_l$ | 0 | -1 | ... | $-y_l$ | 0 | -1 | ... | $-y_r$ | 0 | -1 | = | $M_z(t_k)$ | |
| $R_{1,k}^{(-)}$ | \leq | $\frac{1}{A_l(t_k)}$ | $\frac{z_{1,ob}}{I_{1,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{1,li}}{I_{1,z}(t_k)}$ | | | | | | | | \leq | $R_{1,k}^{(+)}$ | | |
| $R_{1,k}^{(-)}$ | | $\frac{1}{A_l(t_k)}$ | $\frac{z_{1,ob}}{I_{1,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{1,re}}{I_{1,z}(t_k)}$ | | | | | | | | | $R_{1,k}^{(+)}$ | | |
| $R_{1,k}^{(-)}$ | | $\frac{1}{A_l(t_k)}$ | $\frac{z_{1,un}}{I_{1,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{1,li}}{I_{1,z}(t_k)}$ | | | | | | | | | $R_{1,k}^{(+)}$ | | |
| $R_{1,k}^{(-)}$ | | $\frac{1}{A_l(t_k)}$ | $\frac{z_{1,un}}{I_{1,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{1,re}}{I_{1,z}(t_k)}$ | | | | | | | | | $R_{1,k}^{(+)}$ | | |
| \vdots | | \ddots | | | | | | | | | | | \vdots | | |
| $R_{l,k}^{(-)}$ | | $\frac{1}{A_l(t_k)}$ | $\frac{z_{l,ob}}{I_{l,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{l,li}}{I_{l,z}(t_k)}$ | | | | | | | | | $R_{l,k}^{(+)}$ | | |
| $R_{l,k}^{(-)}$ | | $\frac{1}{A_l(t_k)}$ | $\frac{z_{l,ob}}{I_{l,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{l,re}}{I_{l,z}(t_k)}$ | | | | | | | | | $R_{l,k}^{(+)}$ | | |
| $R_{l,k}^{(-)}$ | | $\frac{1}{A_l(t_k)}$ | $\frac{z_{l,un}}{I_{l,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{l,li}}{I_{l,z}(t_k)}$ | | | | | | | | | $R_{l,k}^{(+)}$ | | |
| $R_{l,k}^{(-)}$ | | $\frac{1}{A_l(t_k)}$ | $\frac{z_{l,un}}{I_{l,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{l,re}}{I_{l,z}(t_k)}$ | | | | | | | | | $R_{l,k}^{(+)}$ | | |
| \vdots | | \ddots | | | | | | | | | | | \vdots | | |
| $R_{r,k}^{(-)}$ | | Plastizitätsbedingungen | | | | | | | $\frac{1}{A_r(t_k)}$ | $\frac{z_{r,ob}}{I_{r,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{r,li}}{I_{r,z}(t_k)}$ | | $R_{r,k}^{(+)}$ | | |
| $R_{r,k}^{(-)}$ | | | | | | | | | $\frac{1}{A_r(t_k)}$ | $\frac{z_{r,ob}}{I_{r,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{r,re}}{I_{r,z}(t_k)}$ | | $R_{r,k}^{(+)}$ | | |
| $R_{r,k}^{(-)}$ | $\frac{1}{A_r(t_k)}$ | | | | | | | | $\frac{z_{r,un}}{I_{r,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{r,li}}{I_{r,z}(t_k)}$ | $R_{r,k}^{(+)}$ | | | | |
| $R_{r,k}^{(-)}$ | $\frac{1}{A_r(t_k)}$ | | | | | | | | $\frac{z_{r,un}}{I_{r,y}(t_k)}$ | $\frac{y_{r,re}}{I_{r,z}(t_k)}$ | $R_{r,k}^{(+)}$ | | | | |
| $R_{r,k}^{(-)}$ | | | | | | | | | \leq | | | | | | |

Tafel 5.4.5-4: Struktur der quadratischen Optimierungsaufgabe zur Ermittlung querschnittsinterner Spannungumlagerungen im Zustand II

5.4.6 Vorspannung und nachträglich ergänzte Betonquerschnitte

Durch die Möglichkeit der Einbeziehung von Vorverformungen bei der Berechnung des aktuellen Zeitschrittes kann die Vordehnung des Spannstahls bzw. die Vorverformung des Altbetons gegenüber dem Neubeton in dem Berechnungsmodell berücksichtigt werden. Die Zusammenfassung dieser, auf den ersten Blick sehr unterschiedlichen Erweiterungen resultiert aus deren gleichartigen Behandlung innerhalb des Berechnungsmodells. Unterschiede ergeben sich jedoch bei der Berechnung der Vorverformung des jeweiligen Querschnittsanteils.

Die Ermittlung der Vordehnung des Spannstahls erfolgt dabei in Abhängigkeit der Art der Vorspannung.

Bei Vorspannung mit sofortigem Verbund ist die Dehnung im Spannbett über den gesamten Zeitraum als konstante Vordehnung anzusetzen. Die Berechnung beginnt zum Zeitpunkt des Umspannens, wobei angenommen wird, daß zu diesem Zeitpunkt der starre Verbund zwischen Spannstahl und Beton hergestellt ist. Im Ergebnis des ersten Berechnungsschritts erhält man einen Eigenspannungszustand, der sich auf das Tragverhalten des Querschnitts bei nachfolgender Belastung auswirkt. Infolge der sofort nach dem Umspannen eintretenden elastischen Deformation des Betons ist die Kraft im Spannstahl zum Zeitpunkt t_1 kleiner als die Vorspannkraft im Spannbett. Durch den Eigenspannungszustand und durch nachfolgende Belastung wird das Kriechen des Betons ausgelöst, in dessen Ergebnis je nach Lage der Spannungsnulllinie die Spannstahlkraft weiter abfällt bzw. ansteigt.

Diese Vorgehensweise ist bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund nicht anwendbar, da sich schon während des Vorspannvorgangs bis zum Erreichen der vorgegebenen Vorspannkraft elastische Dehnungen des Betons einstellen. Im ersten Berechnungsschritt ist deshalb die zu erreichende Vorspannkraft als äußere Belastung auf den reinen Betonquerschnitt anzusetzen. Aus der Deformation des Gesamtquerschnitts läßt sich die elastische Dehnung $\varepsilon_{c_p, x_{el}}(t_1)$ in der Faser errechnen, die in Höhe der Spannstahllage liegt.

Aus der Beziehung:

$$\varepsilon_{p, x_v}(t_1) = -\varepsilon_{c_p, x_{el}}(t_1) + \frac{\sigma_p^{(0)}}{E_p} \quad (5.4.6-1)$$

erhält man die Vordehnung des Spannstahls, die notwendig ist, um denselben Spannungs- und Dehnungszustand im Beton hervorzurufen, wie die als äußere Belastung aufgebrachte Vorspannkraft (Abb.5.4.6-1). Die Berechnung kann im Anschluß analog zur Vorspannung mit sofortigem Verbund durchgeführt werden. Dabei wird näherungsweise von unmittelbarem Eintreten des starren Verbunds zwischen Spannstahl und Beton nach Verpressen des Hüllrohrs ausgegangen.

Die Berechnung von vorgespannten Querschnitten ohne Verbund wird im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt.

Bei der Berechnung nachträglich ergänzter Betonquerschnitte ist es notwendig, die Verformung, die der Altbetonquerschnitt dem Neubetonquerschnitt voraus hat, als Vorverformungsanteil in das Materialgesetz des Neubetons einzubeziehen. Der Zeitpunkt für das Wirksamwerden des Neubetonquerschnitts t_w ist dabei in Abhängigkeit seiner Steifigkeitsentwicklung festzulegen.

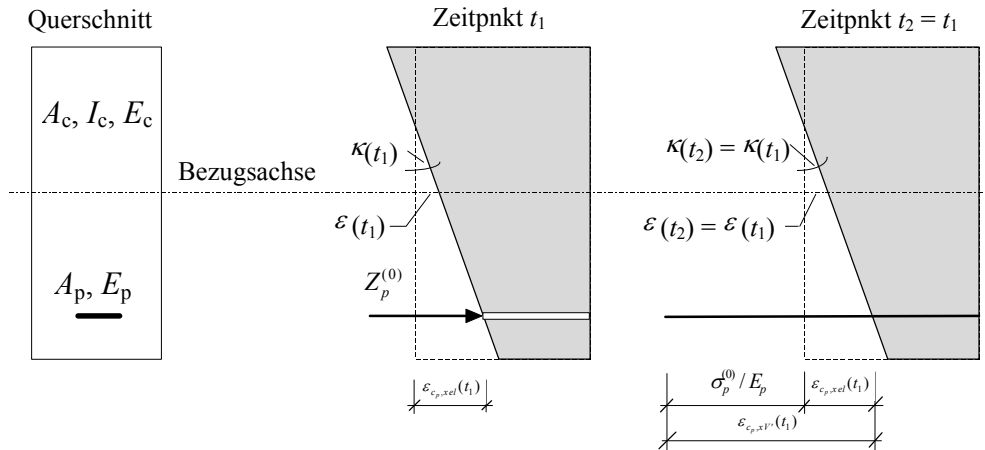


Abb. 5.4.6-1: Ermittlung der Vordehnung bei Vorspannung mit nachträglichem Verbund

In dem Zeitintervall, in dem der nachträglich aufgebraute Beton noch nicht genügend erhärtet ist, um sich vollständig an der Lastabtragung zu beteiligen, wird angenommen, daß die gesamte Belastung vom Altbetonquerschnitt allein aufgenommen wird. Die auf den Neubeton anzusetzenden Vorverformungen ergeben sich aus den Gesamtdeformationen des Altbetonquerschnitts zum Zeitpunkt des Wirksamwerdens des Neubetons. Dabei ist zu beachten, daß sich infolge des Eigengewichts des Neubetons zunächst elastische Deformationen des Altbetons einstellen, die die Ursache zusätzlicher Kriechdeformationen sind.

Zum Zeitpunkt des Wirksamwerdens wird näherungsweise davon ausgegangen, daß sich der Neubeton sofort vollständig an der Lastabtragung beteiligt. Dabei wird vorausgesetzt, daß in der Verbundfuge unverschieblicher Verbund zwischen Alt- und Neubeton vorhanden ist.

In Abb. 5.4.6-2 ist die Spannungs- und Dehnungsverteilung unmittelbar vor und unmittelbar nach Wirksamwerden des Neubetonquerschnittsanteils dargestellt, wobei die Belastung zum Zeitpunkt t_w größer ist als die zum Zeitpunkt t_{w-1} gehörende Belastung.

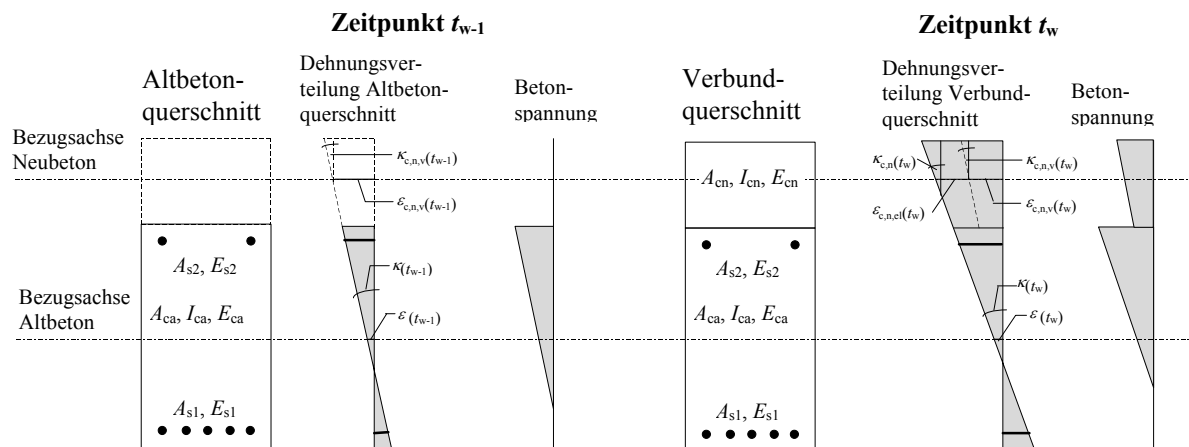


Abb. 5.4.6-2: Spannungs- und Dehnungsverteilung unmittelbar vor und nach Wirksamwerden des Neubetonquerschnittsanteils

Es wird deutlich, daß bei der Berechnung des Zeitpunktes t_w die Deformationen

$$\varepsilon_{c,n,v}(t_w) = \varepsilon(t_{w-1}) + \kappa(t_{w-1})z_n, \quad (5.4.6-2)$$

$$\kappa_{c,n,v}(t_w)=\kappa(t_{w-1}), \tag{5.4.6-3}$$

als Vorverformung des Altbetonanteils gegenüber dem Neubetonanteil einzubeziehen sind. Bei Konstanthalten der Belastung vom Zeitpunkt t_{w-1} zum Zeitpunkt t_w würde sich der Dehnungs- und Spannungszustand des Querschnitts nicht ändern. Die zusätzlichen Deformationen des Gesamtquerschnitts und die Spannung im Neubeton resultieren ausschließlich aus der zum Zeitpunkt t_w zusätzlich aufgetragenen Belastung.

Diese Vorverformung ist bei der Berechnung aller nachfolgenden Zeitschritte in dem Untervektor $\mathbf{c}_{l,k}$ des nachträglich aufgetragenen Querschnittsanteils l zu berücksichtigen.

Infolge des vorhandenen elastischen Deformationszustandes des Gesamtquerschnitts stellen sich Kriechdeformationen im Altbeton und Neubeton ein. Aufgrund des stärkeren Kriechens des Neubetons kommt es zu Spannungsumlagerungen im Verbundquerschnitt, wobei der Neubeton entlastet und der Altbeton stärker belastet wird.

5.4.7 Erweiterung des Modells auf stabförmige Bauteile

Voraussetzung für die Ermittlung der querschnittsinternen Spannungumlagerungen infolge Kriechen und Schwinden des Betons bzw. Relaxation der Spannbewehrung ist die Kenntnis der Schnittgrößen über den gesamten Betrachtungszeitraum. Diese Bedingung ist nur für den Sonderfall der Berechnung statisch bestimmt gelagerter Bauteile nach Theorie I.Ordnung erfüllt.

Da die Schnittgrößenzustand statisch unbestimmt gelagerter Bauteile außer durch die äußeren Lasten zusätzlich durch die Verträglichkeitsbedingungen des Gesamtsystems beeinflusst wird, treten neben den querschnittsinternen Spannungumlagerungen zusätzliche Schnittgrößenumlagerungen am Gesamtsystem ein. Aufgrund der gegenseitigen Beeinflussung der Querschnitts- und Systemumlagerungen ist das Problem nur durch eine Betrachtung am Gesamtsystem lösbar.

Den Ausgangspunkt für die Erweiterung des Berechnungsmodells bildet das Extremalprinzip Gl.(5.4.4-2):

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \int_x \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} dx + \int_x \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{c}_k^{(j-1)} dx \Rightarrow \text{Minimum}.$$

Mit der Annahme der Gültigkeit der Navierschen Hypothese Schubsteifer ebener gerader Stäbe lauten die Gleichgewichtsbedingungen zwischen der äußeren Belastung und den Gesamtschnittgrößen am unverformten System zum Betrachtungszeitpunkt t_k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x^{(j)}(t_k)}{\partial x} + p_x(t_k) &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_y^{(j)}(t_k)}{\partial x^2} + p_z(t_k) &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_z^{(j)}(t_k)}{\partial x^2} + p_y(t_k) &= 0, \end{aligned} \quad (5.4.7-1)$$

wobei der Verlauf der Streckenlasten $p_x(t_k)$, $p_z(t_k)$ und $p_y(t_k)$ über die Stabachse beliebig sein kann.

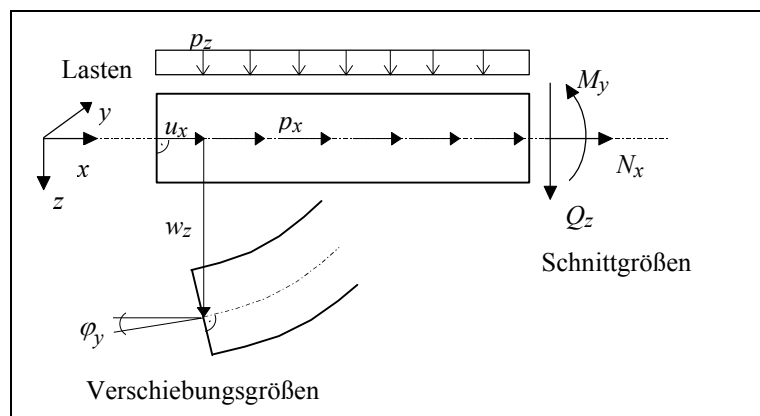


Abb. 5.4.7-1: Schnitt- und Verschiebungsgrößen am Stab (einachsiger Fall)

Da die Gleichgewichtsbedingungen in Abhängigkeit der Größen formuliert werden müssen, die in dem Extremalprinzip als Unbekannte enthalten sind, erfolgt die Ersetzung der

Gesamtschnittgrößen durch die Schnittgrößenanteile unter Berücksichtigung der Gln.(5.4.2-7..9):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\sum_{l=1}^r N_{l,x}^{(j)}(t_k) \right]}{\partial x} + p_x(t_k) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \left[\sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{(j)}(t_k) z_l + M_{l,y}^{(j)}(t_k)) \right]}{\partial x^2} + p_z(t_k) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \left[\sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{(j)}(t_k) y_l + M_{l,z}^{(j)}(t_k)) \right]}{\partial x^2} + p_y(t_k) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.7-2)$$

Bei Anwendung der Matrizenschreibweise erhält man für die Gleichgewichtsbedingungen in Abhängigkeit des Vektors der Schnittgrößenanteile σ_k den Ausdruck:

$$\mathbf{D}_{e,x}(\mathbf{a}_e \sigma_k^{(j)}) + \mathbf{p}_k = 0 \quad \text{mit} \quad (5.4.7-3)$$

$$\mathbf{D}_{e,x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_k = \begin{bmatrix} p_x(t_k) \\ p_z(t_k) \\ p_y(t_k) \end{bmatrix}.$$

Am Rand müssen die Gesamtschnittgrößen mit den vorgegebenen Randkräften bzw. Randmomenten im Gleichgewicht stehen (Abb. 5.4.7-2).

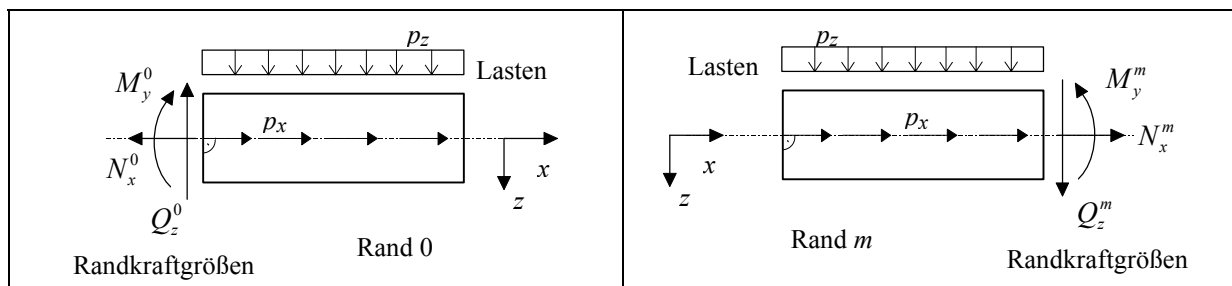


Abb. 5.4.7-2: Definition der Kraftgrößen am Rand (einachsiger Fall)

Unter Berücksichtigung der Schnittgrößenanteile ergeben sich für die statischen Randbedingungen am Rand 0 und am Rand m die Beziehungen:

Rand $h = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^r N_{l,x}^{0,(j)}(t_k) - \tilde{N}_x^0(t_k) &= 0 \\ \frac{\partial \left[\sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{0,(j)}(t_k) z_l + M_{l,y}^{0,(j)}(t_k)) \right]}{\partial x} - \tilde{Q}_z^0(t_k) &= 0 \\ \frac{\partial \left[\sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{0,(j)}(t_k) y_l + M_{l,z}^{0,(j)}(t_k)) \right]}{\partial x} - \tilde{Q}_y^0(t_k) &= 0 \\ \sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{0,(j)}(t_k) z_l + M_{l,y}^{0,(j)}(t_k)) - \tilde{M}_y^0(t_k) &= 0 \\ \sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{0,(j)}(t_k) y_l + M_{l,z}^{0,(j)}(t_k)) - \tilde{M}_z^0(t_k) &= 0 \end{aligned}$$

Rand $h = m$:

$$\begin{aligned} -\sum_{l=1}^r N_{l,x}^{m,(j)}(t_k) - \tilde{N}_x^m(t_k) &= 0 \\ -\frac{\partial \left[\sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{m,(j)}(t_k) z_l + M_{l,y}^{m,(j)}(t_k)) \right]}{\partial x} - \tilde{Q}_z^m(t_k) &= 0 \\ -\frac{\partial \left[\sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{m,(j)}(t_k) y_l + M_{l,z}^{m,(j)}(t_k)) \right]}{\partial x} - \tilde{Q}_y^m(t_k) &= 0 \\ -\sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{m,(j)}(t_k) z_l + M_{l,y}^{m,(j)}(t_k)) - \tilde{M}_y^m(t_k) &= 0 \\ -\sum_{l=1}^r (N_{l,x}^{m,(j)}(t_k) y_l + M_{l,z}^{m,(j)}(t_k)) - \tilde{M}_z^m(t_k) &= 0, \end{aligned}$$

die sich in Matrizenschreibweise in übersichtlicher Form darstellen lassen:

$$\mathbf{R}_{t,x}(\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{0,(j)}) - \tilde{\mathbf{t}}_k^0 = 0, \quad (5.4.7-4)$$

$$-\mathbf{R}_{t,x}(\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{m,(j)}) - \tilde{\mathbf{t}}_k^m = 0. \quad (5.4.7-5)$$

Dabei ist $\mathbf{R}_{t,x}$ der Differentialoperator am Rand, während die Vektoren $\tilde{\mathbf{t}}_k^0$ und $\tilde{\mathbf{t}}_k^m$ die vorgegebenen Randkräfte bzw. Randmomente enthalten.

$$\mathbf{R}_{t,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{t}}_k^0 = \begin{bmatrix} \tilde{N}_x^0(t_k) \\ \tilde{Q}_z^0(t_k) \\ \tilde{Q}_y^0(t_k) \\ \tilde{M}_y^0(t_k) \\ \tilde{M}_z^0(t_k) \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{t}}_k^m = \begin{bmatrix} \tilde{N}_x^m(t_k) \\ \tilde{Q}_z^m(t_k) \\ \tilde{Q}_y^m(t_k) \\ \tilde{M}_y^m(t_k) \\ \tilde{M}_z^m(t_k) \end{bmatrix}$$

Die an jeder Stelle des Bauteils einzuhaltenden Plastizitätsbedingungen sind identisch mit den, in der Optimierungsaufgabe (5.4.5-10) zu berücksichtigenden, Grenzspannungsbedingungen.

$$\mathbf{s}_{0,k}^{(-)} \leq \mathbf{a}_p \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} \leq \mathbf{s}_{0,k}^{(+)} \quad (5.4.7-6)$$

Durch die Anwendung der Multiplikatorenmethode nach Lagrange erhält man das zu dem Extremalprinzip Gl.(5.4.4-2) zugehörige Sattelpunktproblem.

$$\begin{aligned} L^{(j)} = & \frac{1}{2} \int_x \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} dx + \int_x \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{c}_k^{(j-1)} dx + \int_x \boldsymbol{\lambda}_u^T [\mathbf{D}_{e,x}(\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)}) + \mathbf{p}_k] dx + \\ & \boldsymbol{\lambda}_{u_0}^T [\mathbf{R}_{t,x}(\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{0,(j)}) - \tilde{\mathbf{t}}_k^0] + \boldsymbol{\lambda}_{u_m}^T [-\mathbf{R}_{t,x}(\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{m,(j)}) - \tilde{\mathbf{t}}_k^m] + \int_x \boldsymbol{\lambda}_p^T [\mathbf{a}_p \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)}] dx \Rightarrow \text{stationär} \end{aligned} \quad (5.4.7-7)$$

Die Variation der Lagrangefunktion nach den unbekannten Schnittgrößenanteilen liefert mit der *Kuhn-Tucker-Bedingung* die kinematischen Beziehungen für jeden Querschnittsanteil l eines Stabtragwerks nach Theorie I.Ordnung. Der Lagrangemultiplikator λ_u kann dabei als Vektor der Stabverschiebungen $\mathbf{u}_k^{(j)}$ identifiziert werden:

$$\mathbf{u}_k^{(j)} = \begin{bmatrix} u_x^{(j)}(t_k) \\ w_z^{(j)}(t_k) \\ w_y^{(j)}(t_k) \end{bmatrix}.$$

Die Verträglichkeitsbedingungen für einen Querschnittsanteil l lauten in ausgeschriebener Form:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{l,x}^{(j)}(t_k) &= \frac{N_{l,x}^{(j)}(t_k) \Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{E_l(t_k) A_l} + \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon_{l,x,el}(t_i) \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \varepsilon_{l,x,V'}(t_k) + \varepsilon_{l,x,pl}^{(j)}(t_k), \\ &= u_x'^{(j)}(t_k) - w_z''^{(j)}(t_k) y_l - w_y''^{(j)}(t_k) z_l \end{aligned} \quad (5.4.7-8)$$

$$\kappa_{l,y}^{(j)}(t_k) = \frac{M_{l,y}^{(j)}(t_k) \Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{E_l(t_k) I_{l,y}(t_k)} + \sum_{i=1}^{k-1} \kappa_{l,y,el}(t_i) \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \kappa_{l,y,V'}(t_k) + \kappa_{l,y,pl}^{(j)}(t_k) = -w_z''^{(j)}(t_k), \quad (5.4.7-9)$$

$$\kappa_{l,z}^{(j)}(t_k) = \frac{M_{l,z}^{(j)}(t_k) \Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{E_l(t_k) I_{l,z}(t_k)} + \sum_{i=1}^{k-1} \kappa_{l,z,el}(t_i) \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \kappa_{l,z,V'}(t_k) + \kappa_{l,z,pl}^{(j)}(t_k) = -w_y''^{(j)}(t_k), \quad (5.4.7-10)$$

mit den sich bei Reißbildung bzw. Plastizierung des Querschnittsanteils aus den Deformationen des Gesamtquerschnitts ergebenden plastischen Dehnungen und Krümmungen:

$$\varepsilon_{l,x,pl}^{(j)}(t_k) = \frac{1}{A_l(t_k)} \left(\lambda_{l,p,ol}^{(+)} - \lambda_{l,p,ol}^{(-)} + \lambda_{l,p,or}^{(+)} - \lambda_{l,p,or}^{(-)} + \lambda_{l,p,ul}^{(+)} - \lambda_{l,p,ul}^{(-)} + \lambda_{l,p,ur}^{(+)} - \lambda_{l,p,ur}^{(-)} \right),$$

$$\kappa_{l,y,pl}^{(j)}(t_k) = \frac{z_{l,ob}}{I_{l,y}(t_k)} \left(\lambda_{l,p,ol}^{(+)} - \lambda_{l,p,ol}^{(-)} + \lambda_{l,p,or}^{(+)} - \lambda_{l,p,or}^{(-)} \right) + \frac{z_{l,un}}{I_{l,y}(t_k)} \left(\lambda_{l,p,ul}^{(+)} - \lambda_{l,p,ul}^{(-)} + \lambda_{l,p,ur}^{(+)} - \lambda_{l,p,ur}^{(-)} \right)$$

$$\kappa_{l,z,pl}^{(j)}(t_k) = \frac{y_{l,li}}{I_{l,z}(t_k)} \left(\lambda_{l,p,ol}^{(+)} - \lambda_{l,p,ol}^{(-)} + \lambda_{l,p,ul}^{(+)} - \lambda_{l,p,ul}^{(-)} \right) + \frac{y_{l,re}}{I_{l,z}(t_k)} \left(\lambda_{l,p,or}^{(+)} - \lambda_{l,p,or}^{(-)} + \lambda_{l,p,ur}^{(+)} - \lambda_{l,p,ur}^{(-)} \right).$$

Dabei sind die Lagrangemultiplikatoren $\lambda_{l,p}^{(+)}$ und $\lambda_{l,p}^{(-)}$ die Fließparameter des Querschnittsanteils l . Die Indizierungen ol, ul, or, ur geben an, welcher Ecke des Querschnittsanteils der jeweilige Lagrangemultiplikator zugeordnet ist. Durch (+) bzw. (-) wird die Zugehörigkeit zur oberen bzw. unteren Schranke des Querschnittsanteils gekennzeichnet.

Aus den Ableitungen nach den Schnittgrößenanteilen am Rand ergeben sich die kinematischen Randbedingungen, aus denen folgt, daß die Lagrangeparameter λ_{u0} und λ_{um}

mit den Vektoren der Randverformungen $\mathbf{u}_{0,k}^{(j)}$ und $\mathbf{u}_{m,k}^{(j)}$ an den Rändern 0 und m identisch sind.

$$\mathbf{u}_{0,k}^{(j)} = \begin{bmatrix} u_{0,x}^{(j)}(t_k) \\ w_{0,z}^{(j)}(t_k) \\ w_{0,y}^{(j)}(t_k) \\ \varphi_{0,y}^{(j)}(t_k) \\ \varphi_{0,z}^{(j)}(t_k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{m,k}^{(j)} = \begin{bmatrix} u_{m,x}^{(j)}(t_k) \\ w_{m,z}^{(j)}(t_k) \\ w_{m,y}^{(j)}(t_k) \\ \varphi_{m,y}^{(j)}(t_k) \\ \varphi_{m,z}^{(j)}(t_k) \end{bmatrix}$$

Die Überführung des Extremalprinzips (5.4.4-2) mit den Nebenbedingungen (5.4.7-3..6) in eine Optimierungsaufgabe erfordert eine diskrete Beschreibung des Tragwerks. Diese Diskretisierung kann mit Hilfe verschiedener Verfahren vorgenommen werden, mit denen sich unterschiedliche Tragwerksarten behandeln lassen. Eine genauere Beschreibung ist dabei zumeist mit einer größeren Unbekanntenanzahl verbunden.

Aus der Vielzahl von Diskretisierungsmöglichkeiten wurde hier dem Differenzenverfahren der Vorzug gegeben, da einerseits die Berechnung auf Balkentragwerke beschränkt bleiben soll und andererseits die Zahl der Unbekannten im Vergleich zu anderen Verfahren geringer ist.

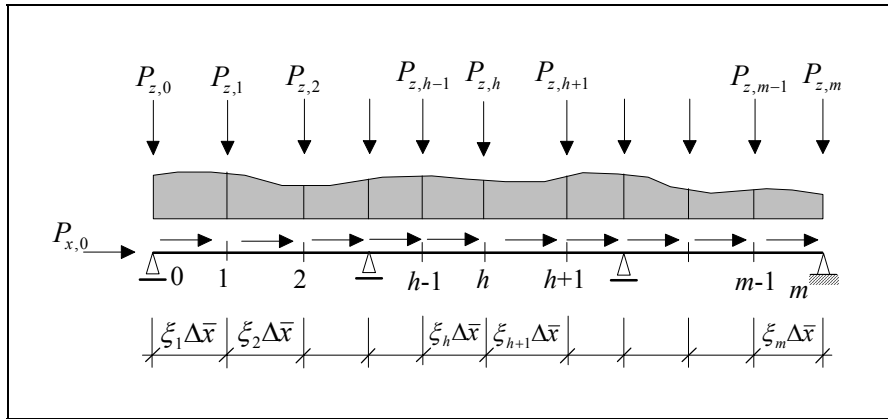


Abb. 5.4.7-3: Diskretisiertes Balkentragwerk

Das Balkentragwerk wird in m Intervalle der Länge $\Delta x_h = \xi_h \Delta \bar{x}$ unterteilt, wobei $\Delta \bar{x}$ eine beliebige Bezugslänge ist. Die Teilungspunkte sind dabei auf die Stützstellen des Tragwerks bzw. auf Lastangriffspunkte abzustimmen. Prinzipiell ist aus Genauigkeitsgründen eine konstante Intervalllänge über die Stabachse anzustreben [5.4]. Für das Extremalprinzip gilt:

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^m \int_{l_h} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} dx + \sum_{h=0}^m \int_{l_h} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{c}_k^{(j-1)} dx \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (5.4.7-11)$$

Ausgehend von den diskreten Stützstellen h wird die Näherung eingeführt, daß der Verlauf der Schnittgrößenanteile über die Intervalllänge konstant ist, so daß nach Ausführen der Integration folgende quadratische Zielfunktion entsteht:

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^m 0.5(\xi_h + \xi_{h+1}) \Delta \bar{x} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \sum_{h=0}^m 0.5(\xi_h + \xi_{h+1}) \Delta \bar{x} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{c}_k^{(j-1)} \Rightarrow \text{Min} . \quad (5.4.7-12)$$

Nach Definition folgender Matrizen und Vektoren:

Vektor der unbekannten Querschnittsanteile:

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} = [\boldsymbol{\sigma}_{k,0}^{(j)} \quad \dots \quad \boldsymbol{\sigma}_{k,h}^{(j)} \quad \dots \quad \boldsymbol{\sigma}_{k,m}^{(j)}]^T$$

Flexibilitätsmatrix:

$$\mathbf{F}_k^{(j-1)} = \begin{bmatrix} 0.5\xi_1\Delta\bar{x}\mathbf{f}_{k,0}^{(j-1)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0.5(\xi_h + \xi_{h+1})\Delta\bar{x}\mathbf{f}_{k,h}^{(j-1)} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & & 0.5\xi_m\Delta\bar{x}\mathbf{f}_{k,m}^{(j-1)} \end{bmatrix}$$

Vektor der Kriech-, Schwind- und Vorverformungen:

$$\mathbf{C}_k^{(j-1)} = \begin{bmatrix} 0.5\xi_1\Delta\bar{x}\mathbf{c}_{k,0}^{(j-1)} \\ \vdots \\ 0.5(\xi_h + \xi_{h+1})\Delta\bar{x}\mathbf{c}_{k,h}^{(j-1)} \\ \vdots \\ 0.5\xi_m\Delta\bar{x}\mathbf{c}_{k,m}^{(j-1)} \end{bmatrix}$$

erhält man die Zielfunktion in der Form:

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{F}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)T} \mathbf{C}_k^{(j-1)} \Rightarrow \text{Minimum} . \quad (5.4.7-13)$$

Die entsprechenden Untermatrizen und -vektoren sind Tafel 5.4.3-1 zu entnehmen. Der zusätzliche Fußzeiger weist auf die betrachtete Stützstelle im Tragwerk hin.

Bei der Diskretisierung der Gleichgewichtsbedingungen werden die Differentialquotienten 1. und 2.Ordnung durch Differenzenquotienten ersetzt.

Bei Anwendung eines rückwärts greifenden Differenzenquotienten gilt für die zur Längsbelastung zugehörigen Gleichgewichtsbedingung im Raum der Gesamtschnittgrößen:

$$\left. \frac{\partial N_x^{(j)}(t_k)}{\partial x} \right|_{h-0.5\xi_h\Delta\bar{x}} \approx \frac{-N_{x,h-1}^{(j)}(t_k) + N_{x,h}^{(j)}(t_k)}{\xi_h\Delta\bar{x}}$$

$$\frac{-N_{x,h-1}^{(j)}(t_k) + N_{x,h}^{(j)}(t_k)}{\xi_h\Delta\bar{x}} + p_x(t_k) = 0 . \quad (5.4.7-14)$$

Nach Ersetzen der Längskräfte $N_{x,h}^{(j)}(t_k)$ durch die Schnittgrößenanteile $N_{l,x,h}^{(j)}(t_k)$ und Multiplikation von Gl.(5.4.7-14) mit $\xi_h\Delta\bar{x}$ erhält man die diskretisierte Gleichgewichtsbedingung für Längsbelastung unter Berücksichtigung der Schnittgrößenanteile:

$$-\sum_{l=1}^r N_{l,x,h-1}^{(j)}(t_k) + \sum_{l=1}^r N_{l,x,h}^{(j)}(t_k) + p_x(t_k)\xi_h\Delta\bar{x} = 0 . \quad (5.4.7-15)$$

Der Belastungsanteil kann dabei als Einzelkraft aufgefaßt werden, die sich aus der Streckenlast im Intervall ergibt und im Punkt $h - 0.5\xi_h\Delta\bar{x}$ angreift.

Die Annäherung des Differentialquotienten 2.Ordnung in den Gleichgewichtsbedingungen für die Querbelastrung erfolgt mittels zentralem Differenzenquotienten, so daß die Stützstelle h der Stelle entspricht, an der die diskretisierte Gleichgewichtsbedingung aufgestellt wird.

$$\left. \frac{\partial^2 M^{(j)}(t_k)}{\partial x^2} \right|_h \approx \frac{\frac{M_{h-1}^{(j)}(t_k)}{\xi_h \Delta\bar{x}} - \frac{1}{\Delta\bar{x}} \left(\frac{1}{\xi_h} + \frac{1}{\xi_{h+1}} \right) M_h^{(j)}(t_k) + \frac{M_{h+1}^{(j)}(t_k)}{\xi_{h+1} \Delta\bar{x}}}{0.5\Delta\bar{x}(\xi_h + \xi_{h+1})}$$

$$\frac{\frac{M_{h-1}^{(j)}(t_k)}{\xi_h \Delta\bar{x}} - \frac{1}{\Delta\bar{x}} \left(\frac{1}{\xi_h} + \frac{1}{\xi_{h+1}} \right) M_h^{(j)}(t_k) + \frac{M_{h+1}^{(j)}(t_k)}{\xi_{h+1} \Delta\bar{x}}}{0.5\Delta\bar{x}(\xi_h + \xi_{h+1})} + p(t_k) = 0 \quad (5.4.7-16)$$

Aus der Ersetzung der Gesamtschnittgrößen ergeben sich folgende diskretisierte Gleichgewichtsbedingungen für Querbelastrung in y - und z -Richtung.

$$\frac{\sum_{l=1}^r (N_{l,x,h-1}^{(j)}(t_k) z_l + M_{l,y,h-1}^{(j)}(t_k))}{\xi_h \Delta\bar{x}} - \frac{1}{\Delta\bar{x}} \left(\frac{1}{\xi_h} + \frac{1}{\xi_{h+1}} \right) \sum_{l=1}^r (N_{l,x,h}^{(j)}(t_k) z_l + M_{l,y,h}^{(j)}(t_k)) +$$

$$\frac{\sum_{l=1}^r (N_{l,x,h+1}^{(j)}(t_k) z_l + M_{l,y,h+1}^{(j)}(t_k))}{\xi_{h+1} \Delta\bar{x}} + p_z(t_k) 0.5\Delta\bar{x}(\xi_h + \xi_{h+1}) = 0 \quad (5.4.7-17)$$

$$\frac{\sum_{l=1}^r (N_{l,x,h-1}^{(j)}(t_k) y_l + M_{l,z,h-1}^{(j)}(t_k))}{\xi_h \Delta\bar{x}} - \frac{1}{\Delta\bar{x}} \left(\frac{1}{\xi_h} + \frac{1}{\xi_{h+1}} \right) \sum_{l=1}^r (N_{l,x,h}^{(j)}(t_k) y_l + M_{l,z,h}^{(j)}(t_k)) +$$

$$\frac{\sum_{l=1}^r (N_{l,x,h+1}^{(j)}(t_k) y_l + M_{l,z,h+1}^{(j)}(t_k))}{\xi_{h+1} \Delta\bar{x}} + p_y(t_k) 0.5\Delta\bar{x}(\xi_h + \xi_{h+1}) = 0 \quad (5.4.7-18)$$

Unter Verwendung der in Tafel 5.4.7-1 zusammengefaßten Matrizen und Vektoren folgt für die diskretisierten Gleichgewichtsbedingungen:

$$\mathbf{A}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} + \mathbf{P}_k = 0, \quad (5.4.7-19)$$

wobei im Vektor \mathbf{P}_k zusätzliche Einzelkräfte berücksichtigt werden können.

Bei der Diskretisierung der statischen Randbedingungen für die Querkräfte ist darauf zu achten, daß am Rand 0 ein vorwärts greifender und am Rand m ein rückwärts greifender

Differenzenquotient zu verwenden ist. Die diskretisierten statischen Randbedingungen lassen sich in Matrizenschreibweise folgendermaßen angeben:

am Rand 0:

$$\mathbf{A}_{R,0} \boldsymbol{\sigma}_k^{0,(j)} - \check{\mathbf{t}}_k^0 = 0,$$

am Rand m :

$$\mathbf{A}_{R,m} \boldsymbol{\sigma}_k^{m,(j)} - \check{\mathbf{t}}_k^m = 0, \quad (5.4.7-19)$$

mit:

$$\mathbf{A}_{R,0} = [\mathbf{a}_{R,0} \quad \mathbf{a}_{R,1}]$$

$$\mathbf{A}_{R,m} = [\mathbf{a}_{R,m-1} \quad \mathbf{a}_{R,m}]$$

$$\mathbf{a}_{R,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ -z_1 \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & -z_l \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & -z_r \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \\ -y_1 \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \dots & -y_l \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \dots & -y_r \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 \\ z_1 & 1 & 0 & \dots & z_l & 1 & 0 & \dots & z_r & 1 & 0 \\ y_1 & 0 & 1 & \dots & y_l & 0 & 1 & \dots & y_r & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{R,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ z_1 \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & z_l \alpha_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & z_r \alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ y_1 \alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \dots & y_l \alpha_1 & 0 & \alpha_1 & \dots & y_r \alpha_1 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{R,m} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -z_1 \alpha_m & -\alpha_m & 0 & \dots & -z_l \alpha_m & -\alpha_m & 0 & \dots & -z_r \alpha_m & -\alpha_m & 0 \\ -y_1 \alpha_m & 0 & -\alpha_m & \dots & -y_l \alpha_m & 0 & -\alpha_m & \dots & -y_r \alpha_m & 0 & -\alpha_m \\ -z_1 & -1 & 0 & \dots & -z_l & -1 & 0 & \dots & -z_r & -1 & 0 \\ -y_1 & 0 & -1 & \dots & -y_l & 0 & -1 & \dots & -y_r & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{R,m-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ z_1 \alpha_m & \alpha_m & 0 & \dots & z_l \alpha_m & \alpha_m & 0 & \dots & z_r \alpha_m & \alpha_m & 0 \\ y_1 \alpha_m & 0 & \alpha_m & \dots & y_l \alpha_m & 0 & \alpha_m & \dots & y_r \alpha_m & 0 & \alpha_m \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Beziehungen für die α -Werte sind Tafel 5.4.7-1 zu entnehmen. Die Plastizitätsbedingungen werden weiterhin für jeden Querschnittsanteil aufgestellt, wobei keine Diskretisierung über die Stabachse notwendig ist. In zusammengefaßter Form lauten die Plastizitätsbedingungen:

$$\mathbf{S}_{0,k}^{(-)} \leq \mathbf{A}_p \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} \leq \mathbf{S}_{0,k}^{(+)}, \quad (5.4.7-20)$$

wobei in den Vektoren $\mathbf{S}_{0,k}^{(-)}$ und $\mathbf{S}_{0,k}^{(+)}$ die Spannungsgrenzwerte aller im Tragwerk vorhandenen Querschnittsanteile enthalten sind. Die Matrix \mathbf{A}_p ist wie folgt aufgebaut:

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} a_{p,0} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{p,h} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{p,m} \end{bmatrix}.$$

Zusätzlich zu den Schnittgrößenanteilen können die Stützkkräfte \mathbf{S} als unbekannte Größen in das Problem einbezogen werden. Ihre Flexibilität \mathbf{F}_s ist dabei mit der inversen Federkonstante zu belegen, bei starrer Stützung ist ein Wert nahe Null einzuführen. Die Kopplung mit der äußeren Belastung erfolgt über die Gleichgewichtsbedingungen bzw. statischen Randbedingungen, wobei die unbekannten Stützkkräfte widerstandsseitig in die jeweilige Bedingung eingehen. In Tafel 5.4.7-2 ist die Struktur des vollständigen Optimierungsproblems angegeben.

Nach Ableiten der zu dem diskretisierten Optimierungsproblem zugehörigen Lagrangefunktion lassen sich mit Kenntnis der diskretisierten kinematischen Beziehungen die Vektoren der Lagrangemultiplikatoren identifizieren, wobei im Vergleich zum nichtdiskretisierten Problem lediglich die an die Plastizitätsbedingungen gekoppelten Lagrangeparameter mit der Intervalllänge zu multiplizieren sind.

| | |
|--|--|
| <p>Algebraischer Operator \mathbf{A}_e</p> $\mathbf{A}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e^{1,0} & \mathbf{A}_e^{1,1} & \mathbf{A}_e^{1,2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \mathbf{A}_e^{h,h-1} & \mathbf{A}_e^{h,h} & \mathbf{A}_e^{h,h+1} & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \mathbf{A}_e^{m-1,m-2} & \mathbf{A}_e^{m-1,m-1} & \mathbf{A}_e^{m-1,m} \end{bmatrix}$ | |
| <p>Untermatrizen \mathbf{A}_e^h</p> $\mathbf{A}_e^{h-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ z_1\alpha_h & \alpha_h & 0 & \dots & z_l\alpha_h & \alpha_h & 0 & \dots & z_r\alpha_h & \alpha_h & 0 \\ y_1\alpha_h & 0 & \alpha_h & \dots & y_l\alpha_h & 0 & \alpha_h & \dots & y_r\alpha_h & 0 & \alpha_h \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}_e^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ -z_1\beta_h & -\beta_h & 0 & \dots & -z_l\beta_h & -\beta_h & 0 & \dots & -z_r\beta_h & -\beta_h & 0 \\ -y_1\beta_h & 0 & -\beta_h & \dots & -y_l\beta_h & 0 & -\beta_h & \dots & -y_r\beta_h & 0 & -\beta_h \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}_e^{h+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ z_1\alpha_{h+1} & \alpha_{h+1} & 0 & \dots & z_l\alpha_{h+1} & \alpha_{h+1} & 0 & \dots & z_r\alpha_{h+1} & \alpha_{h+1} & 0 \\ y_1\alpha_{h+1} & 0 & \alpha_{h+1} & \dots & y_l\alpha_{h+1} & 0 & \alpha_{h+1} & \dots & y_r\alpha_{h+1} & 0 & \alpha_{h+1} \end{bmatrix}$ | |
| <p>Hilfswerte α, β</p> $\alpha_h = \frac{1}{\xi_h \Delta \bar{x}} \quad \alpha_{h+1} = \frac{1}{\xi_{h+1} \Delta \bar{x}} \quad \beta_h = \alpha_h + \alpha_{h+1}$ | |
| <p>Belastungsvektor \mathbf{P}_k</p> $\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} p_{x,1}(t_k)\xi_1\Delta\bar{x} + P_{x,1}(t_k) \\ p_{z,1}(t_k)0.5\Delta\bar{x}(\xi_1 + \xi_2) + P_{z,1}(t_k) \\ p_{y,1}(t_k)0.5\Delta\bar{x}(\xi_1 + \xi_2) + P_{y,1}(t_k) \\ \vdots \\ p_{x,h}(t_k)\xi_h\Delta\bar{x} + P_{x,h}(t_k) \\ p_{z,h}(t_k)0.5\Delta\bar{x}(\xi_h + \xi_{h+1}) + P_{z,h}(t_k) \\ p_{y,h}(t_k)0.5\Delta\bar{x}(\xi_h + \xi_{h+1}) + P_{y,h}(t_k) \\ \vdots \\ p_{x,m-1}(t_k)\xi_{m-1}\Delta\bar{x} + P_{x,m-1}(t_k) \\ p_{z,m-1}(t_k)0.5\Delta\bar{x}(\xi_{m-1} + \xi_m) + P_{z,m-1}(t_k) \\ p_{y,m-1}(t_k)0.5\Delta\bar{x}(\xi_{m-1} + \xi_m) + P_{y,m-1}(t_k) \end{bmatrix}$ <p>$P_{x,h}(t_k), P_{y,h}(t_k), P_{z,h}(t_k)$ – an der Stützstelle angreifende Einzellasten</p> | |

Tafel 5.4.7-1: Matrizen und Vektoren für die diskretisierten Gleichgewichtsbedingungen

| | | | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|--------------------------|--|------------------------|--|----------------------|----------------------------|----------------------------|
| | | 0 | ... | h | ... | m | | | |
| | | $\sigma_{k,0}^{(j)}$ | ... | $\sigma_{k,h}^{(j)}$ | ... | $\sigma_{k,m}^{(j)}$ | S | | |
| | | $0.5\xi_1\Delta\bar{\mathbf{c}}_{k,0}^{(j-1)}$ | ... | $0.5(\xi_h + \xi_{h+1})\Delta\bar{\mathbf{c}}_{k,h}^{(j-1)}$ | ... | $0.5\xi_m\Delta\bar{\mathbf{c}}_{k,m}^{(j-1)}$ | 0 | | |
| ZF | $\sigma_{k,0}^{(j)}$ | $0.5\xi_1\Delta\bar{\mathbf{f}}_{k,0}^{(j-1)}$ | | | | | \Rightarrow | Min. | |
| | \vdots | | \ddots | | | | | | |
| | $\sigma_{k,h}^{(j)}$ | | | $0.5(\xi_h + \xi_{h+1})\Delta\bar{\mathbf{f}}_{k,h}^{(j-1)}$ | | | | | |
| | \vdots | | | | | \ddots | | | |
| | $\sigma_{k,m}^{(j)}$ | | | | | $0.5\xi_m\Delta\bar{\mathbf{f}}_{k,m}^{(j-1)}$ | | | |
| | S | | | | | \mathbf{F}_S | | | |
| SRB | | $\mathbf{a}_{R,0}$ | $\mathbf{a}_{R,1}$ | | | | 1/0 | $=$ | $\tilde{\mathbf{t}}_k^0$ |
| GGB | $\mathbf{A}_e^{1,0}$ | $\mathbf{A}_e^{1,1}$ | $\mathbf{A}_e^{1,2}$ | | | 1/0 | \mathbf{P}_k^1 | | |
| | | \ddots | | | | \vdots | \vdots | | |
| | | $\mathbf{A}_e^{h,h-1}$ | $\mathbf{A}_e^{h,h}$ | $\mathbf{A}_e^{h,h+1}$ | | 1/0 | \mathbf{P}_k^h | | |
| | | \ddots | | | | \vdots | \vdots | | |
| | | | $\mathbf{A}_e^{m-1,m-2}$ | $\mathbf{A}_e^{m-1,m-1}$ | $\mathbf{A}_e^{m-1,m}$ | 1/0 | \mathbf{P}_k^{m-1} | | |
| SRB | | | | | $\mathbf{a}_{R,m-1}$ | $\mathbf{a}_{R,m}$ | 1/0 | | $\tilde{\mathbf{t}}_k^m$ |
| $\mathbf{s}_{0,k}^{(-),0}$ | \leq | $\mathbf{a}_{p,0}$ | | | | | \leq | $\mathbf{s}_{0,k}^{(+),0}$ | |
| \vdots | | | \ddots | | | | | \vdots | |
| $\mathbf{s}_{0,k}^{(-),h}$ | | | | $\mathbf{a}_{p,h}$ | | | | $\mathbf{s}_{0,k}^{(+),h}$ | |
| \vdots | | Plastizitätsbedingungen | | | | \ddots | | \vdots | |
| $\mathbf{s}_{0,k}^{(-),m}$ | | | | | | | | $\mathbf{a}_{p,m}$ | $\mathbf{s}_{0,k}^{(+),m}$ |

Tafel 5.4.7-2: Struktur der quadratischen Optimierungsaufgabe für stabförmige Bauteile

5.4.8 Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen

Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (tension stiffening) wird durch die Übertragung der Zugkraft des Bewehrungsstahls in den Beton ausgelöst. Verantwortlich für die Übertragung sind die Verbundkräfte zwischen der Stahloberfläche und dem umgebenden Beton.

In Abb. 5.4.8-1 sind die Verläufe der Stahl-, der Verbund- und der Betonspannungen dargestellt. Daraus geht hervor, daß eine Berechnung im Zustand I die Steifigkeit des Tragwerks überschätzt und eine Berechnung im „reinen“ Zustand II das Verhalten des Tragwerks zu weich approximiert. Aus dem Vergleich der beiden Fälle, nicht abgeschlossene Rißbildung und abgeschlossene Rißbildung geht außerdem hervor, daß die Größe der Mitwirkung des Betons von der Größe der mittleren Stahldehnung abhängig ist. Näherungsweise kann davon ausgegangen werden, daß nach dem Beginn des Stahlfließens keine Mitwirkung des Betons auf Zug mehr vorhanden ist.

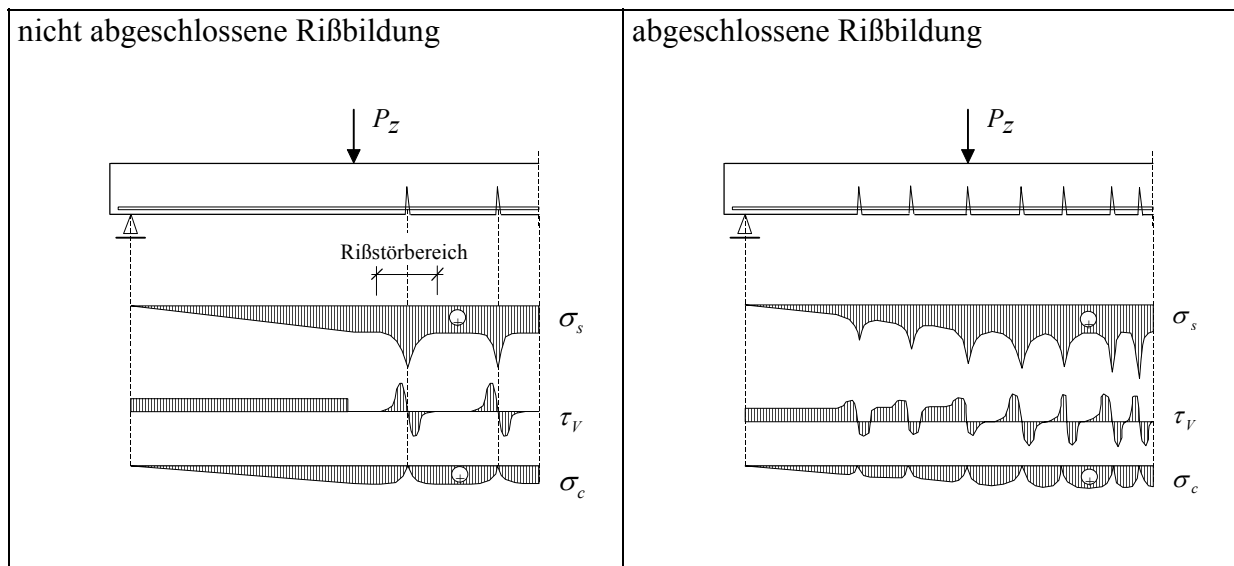


Abb. 5.4.8-1: Stahl-, Verbund- und Betonspannungsverlauf bei nicht abgeschlossener und bei abgeschlossener Rißbildung

Zur Berücksichtigung des „tension stiffening“-Effekts bei der Berechnung von Stabtragwerken können verschiedene Wege beschritten werden:

1. Modifikation der Stahlkennlinie im Zugbereich [5.5], [5.6], [5.7], [5.8], [5.9]
2. Modifikation der Betonkennlinie im Zugbereich [5.10], [5.11], [5.12], [5.13], [5.14], [5.15]

Im weiteren wird der unter Punkt 2 genannte Weg verfolgt, wobei der Einfluß des Verbundkriechens auf den Verlauf der modifizierten Betonkennlinie vernachlässigt wird.

Durch die Modifikation der Kennlinie des zugbeanspruchten Betons werden die vorhandenen Risse über die Intervalllänge „verschmiert“. Dabei wird von einem linearen Verhalten des Betons bis zum Erreichen einer von der mittleren Stahldehnung abhängigen Grenzspannung ausgegangen. Die Betonkennlinie kann in diesem Bereich demzufolge durch das für den Druckbereich gültige zeitabhängige Materialgesetz (Gl.5.4.3-9) beschrieben werden.

Nach Erreichen der Grenzspannung wird, analog zur Vorgehensweise nach *Quast* [5.10], ein konstanter Verlauf der Betonzugspannung angenommen. Die Grenzspannung errechnet sich aus der Beziehung [5.10]:

$$f_{ct,grenz}^{(j)}(t_k) = f_{ct} \left[\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s^{(j-1)}(t_k)}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right], \quad (5.4.8-1)$$

mit

- ε_y - Dehnung bei Erreichen der Streckgrenze des Stahls
- $\varepsilon_s^{(j-1)}(t_k)$ - Stahldehnung zum aktuellen Zeitpunkt (aus Iteration $j-1$)
- ε_{ct} - elastische Dehnung des Betons am Übergang vom elastischen zum plastischen Verhalten
- f_{ct} - rechnerische Betonzugfestigkeit.

Aus der Beziehung (5.4.8-1) geht hervor, daß bei Erreichen der Stahlstreckgrenze keine weitere Mitwirkung des Betons auf Zug mehr vorhanden ist.

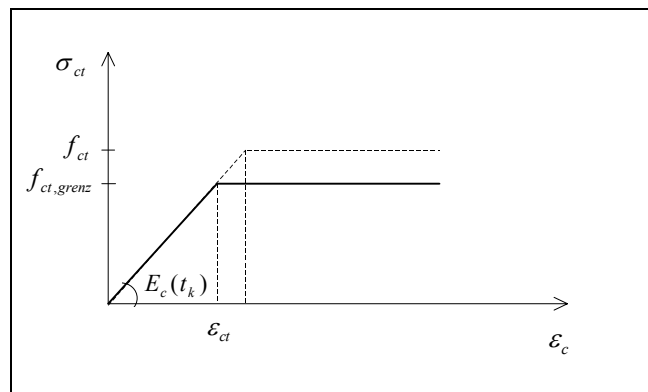


Abb. 5.4.8-2: Modifizierte Kennlinie des zugbeanspruchten Betons

Die Einbeziehung des Mitwirkens des Betons auf Zug kann dadurch erfolgen, daß $f_{ct,grenz}^{(j-1)}(t_k)$ als positiver Spannungsgrenzwert in den Vektor $\mathbf{s}_{0,k}^{(+)}$ eingeführt wird. Der Spannungsverlauf vor Erreichen dieses Grenzwerts ergibt sich automatisch aus der Berechnung. Dabei ist zu beachten, daß in jedem diskreten Punkt des Tragwerks ein anderer Spannungsgrenzwert, zugehörig zu der an dieser Stelle vorhandenen Stahldehnung, zu berücksichtigen ist.

5.5 Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität

Bei der Berechnung von Stahlbeton- bzw. Spannbetonkonstruktionen müssen die Zusatzverformungen infolge Kriechen und Schwinden des Betons vor allem dann berücksichtigt werden, wenn durch sie der Schnittgrößenzustand des Gesamttragwerks bzw. einzelner Tragwerksteile in ungünstiger Richtung verändert wird. Das trifft vor allem auf solche Bauteile zu, bei denen die Berechnung unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität zu erfolgen hat, d.h. bei vorwiegend auf Druck beanspruchten Bauteilen.

Durch das Kriechen des Betons wird dabei die Zusatzausmitte infolge geometrisch nichtlinearem Verhalten erheblich vergrößert. Die mit anwachsenden Zusatzmomenten gekoppelten elastischen Deformationen verursachen ihrerseits zusätzliche Kriechverformungen, die eine erneute Veränderung des Schnittgrößenzustandes hervorrufen. Infolgedessen liegt die Langzeittragfähigkeit druckbeanspruchter Bauteile zum Teil weit unterhalb der ihnen zugeordneten Kurzzeittragfähigkeit.

Die Berücksichtigung der für den nichtlinearen Fall gültigen kinematischen Beziehungen [5.16],

$$\varepsilon_x(t_k) = u'_x(t_k) + \frac{1}{2} \left(w'_z(t_k)^2 + w'_y(t_k)^2 \right)$$

$$\kappa_y(t_k) = w''_z(t_k) \quad (5.5-1)$$

$$\kappa_z(t_k) = w''_y(t_k)$$

führt zu einer Funktion der konjugierten Formänderungsenergiedichte, die bereichsweise konvexe bzw. konkave Eigenschaften besitzt [5.17]. Aus diesem Grund werden die Energieanteile aus geometrischer Nichtlinearität vernachlässigt, so daß das für die geometrisch lineare Theorie gültige Funktional (5.4.4-2) auch den Ausgangspunkt für ein geometrisch nichtlineares Berechnungsmodell bildet.

Die Erweiterung des Berechnungsmodells auf geometrisch nichtlineare Bauteile erfolgt nun analog zur Definition des Begriffs der Theorie II.Ordnung, daß die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System für die Longitudinalkraft $L_x^{(j)}(t_k)$ und die Transversalkräfte $T_z^{(j)}(t_k)$ und $T_y^{(j)}(t_k)$ aufgestellt werden (Abb.5.5-1).

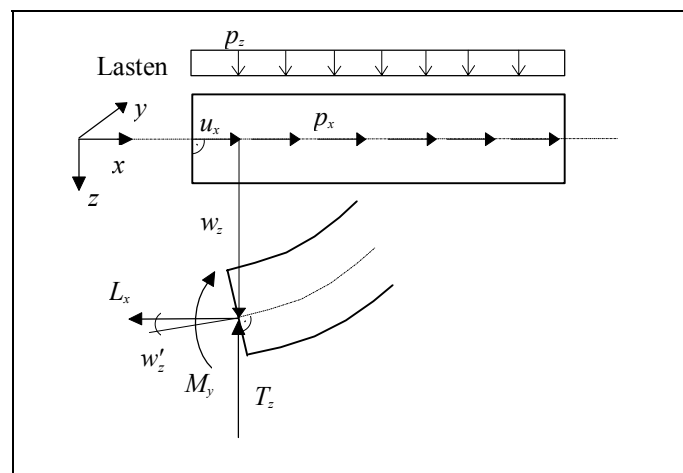


Abb. 5.5-1: Schnittgrößen am verformten Stab (einachsiger Fall)

Da die Naviersche Hypothese weiterhin gelten soll, erhält man die Gleichgewichtsbedingungen am verformten Stab in der Form:

$$\begin{aligned} L'_x{}^{(j)}(t_k) + p_x(t_k) &= 0, \\ T'_z{}^{(j)}(t_k) + p_z(t_k) &= 0, \\ T'_y{}^{(j)}(t_k) + p_y(t_k) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5-1)$$

Zwischen den auf die ursprüngliche, unverformte Stabachse bezogenen Kräfte $L_x^{(j)}(t_k)$, $T_z^{(j)}(t_k)$, $T_y^{(j)}(t_k)$ und den Schnittgrößen $N_x^{(j)}(t_k)$, $Q_z^{(j)}(t_k)$, $Q_y^{(j)}(t_k)$ bestehen die Transformationsbeziehungen:

$$\begin{aligned} L_x^{(j)}(t_k) &= N_x^{(j)}(t_k) \cos w'_z \cos w'_y - Q_z^{(j)}(t_k) \sin w'_z - Q_y^{(j)}(t_k) \sin w'_y, \\ T_z^{(j)}(t_k) &= Q_z^{(j)}(t_k) \cos w'_z + N_x^{(j)}(t_k) \sin w'_z, \\ T_y^{(j)}(t_k) &= Q_y^{(j)}(t_k) \cos w'_y + N_x^{(j)}(t_k) \sin w'_y, \end{aligned} \quad (5.5-2)$$

die sich mit der Annahme kleiner Drehwinkel ($\sin w' = w'$, $\cos w' = 1$) und Vernachlässigung des 2. und 3. Gliedes in der Beziehung für die Longitudinalkraft $L_x^{(j)}(t_k)$ [5.16] vereinfachen zu:

$$\begin{aligned} L_x^{(j)}(t_k) &\cong N_x^{(j)}(t_k), \\ T_z^{(j)}(t_k) &\cong Q_z^{(j)}(t_k) + N_x^{(j)}(t_k) w'_z, \\ T_y^{(j)}(t_k) &\cong Q_y^{(j)}(t_k) + N_x^{(j)}(t_k) w'_y. \end{aligned} \quad (5.5-3)$$

Nach Einsetzen der genäherten Transformationsbeziehungen Gl.(5.5-3) in Gl.(5.5-1) ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen in Abhängigkeit der Gesamtschnittgrößen:

$$\begin{aligned} N'_x{}^{(j)}(t_k) + p_x(t_k) &= 0, \\ \left(N_x^{(j)}(t_k) w'_z \right)' + M_y''^{(j)}(t_k) + p_z(t_k) &= 0, \\ \left(N_x^{(j)}(t_k) w'_y \right)' + M_z''^{(j)}(t_k) + p_y(t_k) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5-4)$$

Da die Stabverformungen w_y und w_z nicht als variable Größen in dem Problem auftauchen, muß die Berechnung in mehreren Iterationsschritten erfolgen, wobei die Verformungen des jeweils vorangegangenen Iterationsschritts ($j-1$) in den Gleichgewichtsbedingungen und statischen Randbedingungen des aktuellen Iterationsschritts (j) berücksichtigt werden.

$$N'_x{}^{(j)}(t_k) + p_x(t_k) = 0,$$

$$\begin{aligned} \left(N_x^{(j)}(t_k) w_z'^{(j-1)} \right)' + M_y''^{(j)}(t_k) + p_z(t_k) &= 0, \\ \left(N_x^{(j)}(t_k) w_y'^{(j-1)} \right)' + M_z''^{(j)}(t_k) + p_y(t_k) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5-5)$$

Analog zur Vorgehensweise bei geometrisch linearer Theorie (Abschn.5.4.7) können die Gesamtschnittgrößen durch Schnittgrößenanteile ersetzt werden. Mit Anwendung der Matrizenschreibweise kann geschrieben werden:

$$\mathbf{D}_{e,x}^{\text{II}} \left(\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} \right) + \mathbf{p}_k = 0, \quad (5.5-6)$$

wobei sich der Differentialoperator $\mathbf{D}_{e,x}^{\text{II}}$ in einen geometrisch linearen und in einen geometrisch nichtlinearen Anteil zerlegen läßt:

$$\mathbf{D}_{e,x}^{\text{II}} = \mathbf{D}_{e,x} + \mathbf{D}_{e,x}^{\text{nl}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ w_z''^{(j-1)} + w_z'^{(j-1)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ w_y''^{(j-1)} + w_y'^{(j-1)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5-7)$$

Für die statischen Randbedingungen gilt unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität:

$$\mathbf{R}_{t,x}^{\text{II}} \left(\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{0,(j)} \right) - \check{\mathbf{t}}_k^0 = 0, \quad (5.5-8)$$

$$-\mathbf{R}_{t,x}^{\text{II}} \left(\mathbf{a}_e \boldsymbol{\sigma}_k^{0,(j)} \right) - \check{\mathbf{t}}_k^0 = 0, \quad (5.5-9)$$

mit dem Differentialoperator am Rand:

$$\mathbf{R}_{t,x}^{\text{II}} = \mathbf{R}_{t,x} + \mathbf{R}_{t,x}^{\text{nl}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ w_z'^{(j-1)} & 0 & 0 \\ w_y'^{(j-1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5-10)$$

Die kinematischen Beziehungen lassen sich aus dem zugehörigen Stationaritätsprinzip herleiten:

$$L^{(j)} = \frac{1}{2} \int_x \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)\text{T}} \mathbf{f}_k^{(j-1)} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} dx + \int_x \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)\text{T}} \mathbf{c}_k^{(j-1)} dx + \int_x \boldsymbol{\lambda}_u^{\text{T}} \left[\mathbf{D}_{\text{e},x}^{\text{II}} \left(\mathbf{a}_\text{e} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} \right) + \mathbf{p}_k \right] dx + \boldsymbol{\lambda}_{u_0}^{\text{T}} \left[\mathbf{R}_{\text{t},x}^{\text{II}} \left(\mathbf{a}_\text{e} \boldsymbol{\sigma}_k^{0,(j)} \right) - \check{\mathbf{t}}_k^0 \right] + \boldsymbol{\lambda}_{u_m}^{\text{T}} \left[-\mathbf{R}_{\text{t},x}^{\text{II}} \left(\mathbf{a}_\text{e} \boldsymbol{\sigma}_k^{m,(j)} \right) - \check{\mathbf{t}}_k^m \right] + \int_x \boldsymbol{\lambda}_p^{\text{T}} \left[\mathbf{a}_\text{p} \boldsymbol{\sigma}_k^{(j)} \right] dx \Rightarrow \text{stationär} \quad (5.5-11)$$

Nach Nullsetzen der 1.Variation der Lagrangefunktion nach dem Vektor der unbekannten Schnittgrößenanteile erhält man mit $\lambda_u = \mathbf{u}_k^{(j)}$ die Verträglichkeitsbeziehungen für die Theorie II.Ordnung:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{l,x}^{(j)}(t_k) &= \frac{N_{l,x}^{(j)}(t_k)\Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{E_l(t_k)A_l} + \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{E}_{l,x,el}(t_i)\Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \mathcal{E}_{l,x,V'}(t_k) + \mathcal{E}_{l,x,pl}^{(j)}(t_k) \\ &= u_x^{(j)}(t_k) - w_z^{(j)}w_z''^{(j-1)} - w_y^{(j)}w_y''^{(j-1)} - w_z''^{(j)}(t_k)y_l - w_y''^{(j)}(t_k)z_l\end{aligned}\quad (5.5-12)$$

$$\kappa_{l,y}^{(j)}(t_k) = \frac{M_{l,y}^{(j)}(t_k)\Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{E_l(t_k)I_{l,y}(t_k)} + \sum_{i=1}^{k-1} \kappa_{l,y,el}(t_i)\Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \kappa_{l,y,v'}(t_k) + \kappa_{l,y,pl}^{(j)}(t_k) = -w_z''^{(j)}(t_k), \quad (5.5-13)$$

$$\kappa_{l,z}^{(j)}(t_k) = \frac{M_{l,z}^{(j)}(t_k) \Phi_{lk,k}^{(j-1)}}{E_l(t_k) I_{l,z}(t_k)} + \sum_{i=1}^{k-1} \kappa_{l,z,el}(t_i) \Phi_{lk,i}^{(j-1)} + \kappa_{l,z,V'}(t_k) + \kappa_{l,z,pl}^{(j)}(t_k) = -w_y''^{(j)}(t_k), \quad (5.5-14)$$

wobei sich im Vergleich zu Gl.(5.5-1) lediglich die Beziehung für die Stablängsdehnung ändert. In Abb. 5.5-2 ist die geometrische Interpretation der Verträglichkeitsbedingung nach Theorie II.Ordnung dargestellt.

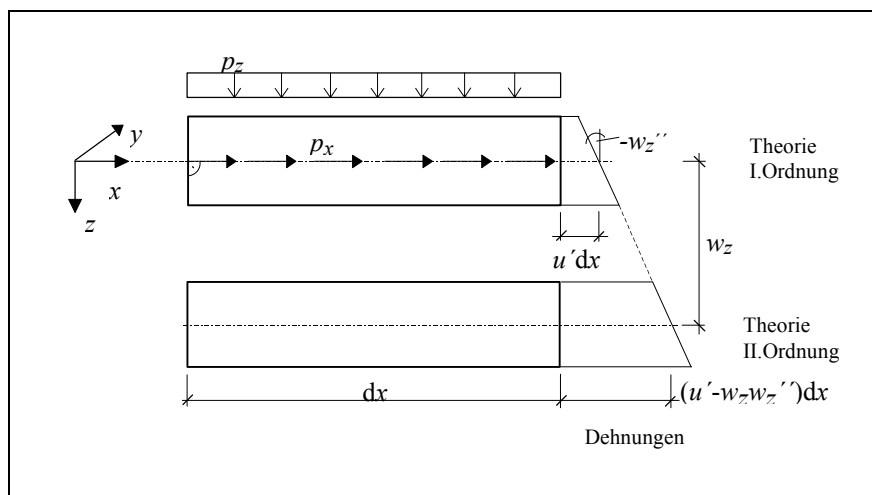


Abb. 5.5-2: Kinematische Beziehungen nach Theorie II.Ordnung (einachsiger Fall)

Bei der Diskretisierung der Gleichgewichtsbedingungen und der statischen Randbedingungen sind nun zusätzlich die Ableitungen der Stabverschiebungen durch Differenzenquotienten erster und zweiter Ordnung anzunähern. Dadurch werden folgende, in Abschn. 5.4.7 definierte, Matrizen modifiziert:

$$\mathbf{A}_e^h = \begin{bmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & w_{z,h}^{(j-1)} \alpha_h - (w_{z,h}^{(j-1)} + z_l) \beta_h + w_{z,h}^{(j-1)} \alpha_{h+1} & -\beta_h & 0 & \dots \\ \dots & w_{y,h}^{(j-1)} \alpha_h - (w_{y,h}^{(j-1)} + y_l) \beta_h + w_{y,h}^{(j-1)} \alpha_{h+1} & 0 & -\beta_h & \dots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_{R,0} = \begin{bmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & -(w_{z,0}^{(j-1)} - w_{z,1}^{(j-1)} + z_l) \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 & \dots \\ \dots & -(w_{y,0}^{(j-1)} - w_{y,1}^{(j-1)} + y_l) \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & \dots \\ \dots & z_l & 1 & 0 & \dots \\ \dots & y_l & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_{R,m} = \begin{bmatrix} \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & -(w_{z,m}^{(j-1)} - w_{z,m-1}^{(j-1)} + z_l) \alpha_m & -\alpha_m & 0 & \dots \\ \dots & -(w_{y,m}^{(j-1)} - w_{y,m-1}^{(j-1)} + y_l) \alpha_m & 0 & -\alpha_m & \dots \\ \dots & z_l & 1 & 0 & \dots \\ \dots & y_l & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}.$$

Mit Einführung der modifizierten Untermatrizen in die Gleichgewichtsbedingung Gl.(5.4.7-19) können geometrisch nichtlineare Einflüsse in dem Berechnungsmodell berücksichtigt werden. Die für die Berechnung notwendigen Verformungen erhält man als Lagrangeparameter aus der diskretisierten Lagrangefunktion des vorangegangenen Iterationsschritts.

An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, daß Einflüsse, die infolge Vorverformung bzw. über den Stab veränderlicher Längskraftexzentrizität entstehen, auf dieselbe Weise berücksichtigt werden können. In den diskretisierten Gleichgewichtsbedingungen sind dabei die Stabdurchbiegungen w_y und w_z durch die Exzentrizitäten e_y und e_z zu ersetzen.

Der Unterschied zur Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität besteht darin, daß die Vorverformung von vornherein bekannt ist und deshalb auf eine iterative Vorgehensweise verzichtet werden kann.

5.6 Rechentechnische Umsetzung des Modells

Als Berechnungshilfsmittel wurde im Rahmen der Arbeit das Programmsystem CERES (Creep Effects in Reinforced Concrete Beam Structures) [5.18] entwickelt. Da die Anzahl der Optimierungsvariablen bei Verwendung konventioneller Personalcomputer stark beschränkt ist, wurde das Programm für den Einsatz auf Workstations vom Typ IBM RS 6000 mit AIX Betriebssystem konzipiert. Bei der Berechnung werden die drei nachfolgend aufgeführten Blöcke durchlaufen:

1. Eingabeblock,
2. Aufbereitungsblock,
3. Berechnungs- und Ausgabeblock.

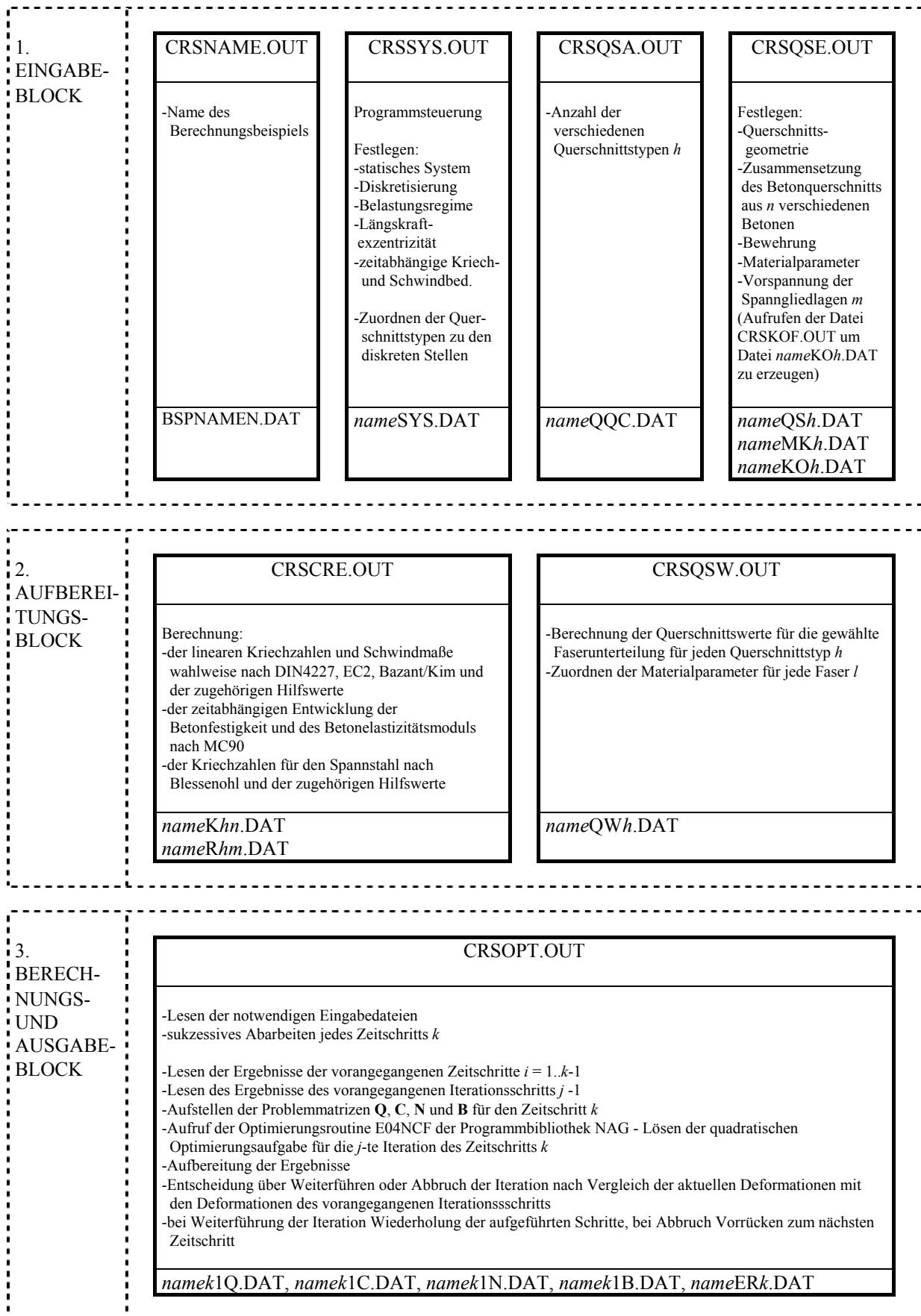
In Tafel 5.6-1 sind die in den einzelnen Blöcke abzuarbeitenden Programme sowie die dabei entstehenden Dateien, deren Inhalt in Tabelle 5.6-1 zusammengefaßt ist, angegeben. Ferner werden die Programmabläufe in groben Zügen beschrieben.

Im Eingabeblock werden die für die Berechnung notwendigen Angaben zum statischen System, zum Belastungsregime, zu den Kriech- und Schwindbedingungen und zu den Querschnittswerten abgefragt und in Dateien zur weiteren Verarbeitung abgelegt. Dabei besteht die Möglichkeit, in einem Bauteil unterschiedliche Querschnitte an verschiedenen Schnittstellen zu definieren, wobei sich jeder Querschnitt aus einer beliebigen Teilflächenanzahl mit unterschiedlichen Materialkenngrößen sowie voneinander abweichenden Kriechzahlen und Schwindmaßen zusammensetzen kann. Weiterhin erfolgt die Festlegung der Betrachtungszeitpunkte, der Lage der diskreten Schnitte im Bauteil sowie der Schichten- bzw. Faseranzahl in jedem definierten Querschnitt.

Die im Eingabeblock erzeugten Dateien bilden die Grundlage der Berechnung im Aufbereitungsblock. Durch das Programm CRSCRE.OUT werden die Kriechzahlen des Betons und des Spannstahls (wenn vorhanden), die Schwindmaße sowie die zeitabhängige Entwicklung der Betondruckfestigkeit und des Betonelastizitätsmoduls für jeden definierten Querschnitt ermittelt und zur Weiterverarbeitung formatgebunden in Dateien gespeichert. Zur Berechnung der Kriechzahlen und Schwindmaße des Betons stehen dabei verschiedene Vorhersageverfahren zur Verfügung (Abschn.2.3 und 2.4.4). Die Berechnung der Querschnittswerte in Abhängigkeit von der gewählten Fasereinteilung und die Verknüpfung jeder Querschnittsfaser mit den zugehörigen Materialkenngrößen erfolgt durch das Programm CRSQSW.OUT. Eine Reduzierung der Unbekanntenanzahl läßt sich bei sehr feiner Querschnittsunterteilung erreichen, indem die Trägheitsmomente einzelner Querschnittsanteile näherungsweise mit dem Wert Null belegt werden. Die zugehörigen Momentenanteile werden dann bei der Berechnung nicht berücksichtigt.

Die eigentliche Berechnung der Auswirkungen des zeitabhängigen Materialverhaltens wird im Berechnungs- und Ausgabeblock durch das Programm CRSOPT.OUT realisiert, wobei sukzessive jeder im voraus festgelegte Betrachtungszeitpunkt abgearbeitet wird.

Die Lösung der Optimierungsaufgaben erfolgt durch die in das Programm implementierte Optimierungsroutine E04NCF der NAG-Fortran Library [5.19]. Das der Routine E04NCF zugrundeliegende Optimierungsverfahren ist durch einen Algorithmus gekennzeichnet, der in zwei aufeinanderfolgenden Phasen unter Ausnutzung der Konvexität der Zielfunktion abläuft. In der ersten Phase wird mit Hilfe eines linearen Optimierungsalgorithmus ein zulässiger Punkt ermittelt, von dem ausgehend in der zweiten Phase die Berechnung des Minimums der quadratischen Zielfunktion innerhalb des zulässigen Bereiches erfolgt [5.19].



Tafel 5.6-1: Aufbau des Programmsystems CERES [5.18]

Im Ergebnis der Optimierungsaufgabe erhält man neben dem minimalen Wert der Zielfunktion die als variable Größen unmittelbar in das Problem eingehenden Schnittgrößenanteile sowie die mit den Lagrangemultiplikatoren identischen Verformungen des Gesamttragwerks, aus denen sich die Querschnittsdeformationen an den Stützstellen über lineare Beziehungen ermitteln lassen. Mit Kenntnis der Kriechzahlen und Schwindmaße lassen sich die elastischen Deformationen aus den Gesamtdeformationen des jeweiligen Querschnitts eliminieren und gehen unter Berücksichtigung der Kriech- und Schwindwerte des nachfolgenden Betrachtungszeitpunkts als Vorverformungen in die Berechnung des sich anschließenden Zeitschritts ein.

Bei Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens des Betons bzw. des Spannstahls in der differentiellen Formulierung, bei Anwendung der Theorie II.Ordnung und bei Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen sind innerhalb jedes Betrachtungszeitpunkts zusätzliche Iterationen notwendig, um die aktuellen Deformationen sowie die Beton- und die Stahlspannungen zu kontrollieren. Die Annäherung an die endgültigen Ergebniswerte für den entsprechenden Zeitschritt erfolgt durch die Berücksichtigung der Ergebnisse der vorangegangenen Iteration bei der Neuberechnung der Problemmatrizen für die aktuelle Iteration. Nach Ablauf einer Iteration werden die berechneten Verformungen der aktuellen Iteration mit den Verformungen der vorangegangenen Iteration verglichen. Ist der ermittelte Unterschied an jeder Stützstelle des Tragwerks kleiner als 1%, werden die Iterationen abgebrochen, es erfolgt der Übergang zum nächsten Zeitschritt.

Tabelle 5.6-1: Inhalte der während eines Berechnungsgangs erzeugten Dateien

| Dateiname | Inhalt der Datei |
|------------------|---|
| BSPNAMEN.DAT | – Name des Berechnungsbeispiels |
| nameSYS.DAT | – Steuerung der Berechnung, statisches System, Belastungsregime, Kriech- und Schwindbedingungen – Zuordnung der Querschnittstypen zu den Stützstellen im Tragwerk, Festlegen der zeitlichen Diskretisierung und der Stützstellen des Tragwerks |
| nameQQC.DAT | – Anzahl der vorhandenen Querschnittstypen |
| nameQSh.DAT | – Querschnittsgeometrie, Festlegen der Teilflächen und der Querschnittsdiskretisierung (Schichten- bzw. Faseranzahl) – Angaben zum Beton und zur Bewehrung, Festlegen der Vorspannung |
| nameMKh.DAT | – Materialkenngrößen des Betons |
| nameKOh.DAT | – Koeffizienten für die Ermittlung der Kriechzahlen und Schwindmaße durch das Vorhersageverfahren nach <i>Bazant</i> (Abschn.2.4.4) |
| nameKhn.DAT | – Kriechzahlen Beton, Hilfswerte, Schwindmaße, zeitliche Entwicklung des Betonelastizitätsmoduls und der Betondruckfestigkeit |
| nameRhm.DAT | – Kriechzahlen Spannstahl, Hilfswerte |
| nameQWh.DAT | – statische Werte der einzelnen Querschnittsfasern und Abstände zur ideellen Schwerachse – Zuordnen der Materialkenngrößen, der Kriech- und Schwindwerte sowie der Vorspannung zu den einzelnen Querschnittsanteilen |
| namek1Q.DAT | – quadratisches Glied der Zielfunktion (zeitabhängige Flexibilitäts-matrix) |
| namek1C.DAT | – lineares Glied der Zielfunktion (Vektor der Kriech-, Schwind- und Vorverformungen) |
| namek1N.DAT | – Vektor der linearen Nebendbedingungen (Gleichgewichtsbedingungen, statische Randbedingungen, Spannungsbegrenzungen) |
| namek1B.DAT | – Vektor der oberen und unteren Schranken (Variablenbegrenzungen, Belastung, Spannungsgrenzwerte) |
| nameERk.DAT | – Berechnungsergebnisse |

6 Verifikation des Berechnungsmodells

6.1 Unbewehrter Beton

Als Grundlage für die Überprüfung des Betonmodells dienen die durch *Grasser et al.* [6.1] ausgeglichenen Versuche an unbewehrten Betonprismen von *Rüsch et al.* [6.2]. Die Durchführung der Versuche wurde zunächst veranlaßt, um Aussagen über die Festigkeitsentwicklung des Betons unter Dauerlast zu erhalten. Neben den im bruchnahen Bereich belasteten Probekörpern gab es zusätzlich umfangreiche Versuchsreihen an Prismen, bei denen ein Belastungsgrad unterhalb 80% der Bruchlast vorhanden war.

Diese Versuche wurden von *Grasser et al.* im Hinblick auf das Langzeitverformungsverhalten des Betons oberhalb des Gebrauchslastbereiches ausgewertet. Dabei wurde der Einfluß der Betonfestigkeit, des Betonalters bei Belastungsbeginn und der Lastexzentrizität untersucht. Aus den Versuchsergebnissen konnte eindeutig ein überproportionaler Zusammenhang zwischen Kriechdehnung und kriecherzeugender Spannung abgeleitet werden, wobei die Überproportionalität mit steigendem Lastniveau erheblich zunahm. Besonders deutlich wird dies bei der Betrachtung der von *Grasser* angegebenen Kriechzahlerhöhungsfaktoren (siehe Abb. 2.4.3-3). Die Belastungsintensität, bei der die Annahme spannungsproportionalen (linearen) Kriechens zulässig ist wurde mit 25% der Prismendruckfestigkeit festgelegt.

Zum Zweck der Verifikation des in der vorliegenden Arbeit entwickelten Berechnungsmodells erfolgt der rechnerische Vergleich mit den Versuchen für Betonprismen mit einer Würfeldruckfestigkeit $f_{c,cube,2min.}(\tau)$ von 40 bzw. 60 N/mm² und Belastungsaltern von 90 bzw. 28 Tagen. Die Fälle $f_{c,cube,2min.}(\tau) = 20$ N/mm² und $\tau = 730$ Tage werden nicht untersucht, da sie aus baupraktischer Sicht von untergeordneter Bedeutung sind. Die theoretischen Untersuchungen werden jeweils für den zentrischen Fall $e/d = 0$ und für den Fall der größten im Versuch vorhandenen Lastexzentrizität $e/d = 0.1$ durchgeführt, wobei davon ausgegangen wird, daß bei ausreichender Übereinstimmung der Rechenergebnisse mit den Versuchswerten auch für die dazwischenliegenden Exzentrizitäten ausreichende Übereinstimmung vorhanden ist.

In [6.1] wurden die ausgeglichenen Versuchskurven in Abhängigkeit vom Belastungsgrad angegeben, der als Verhältniswert von aufgebrachter Spannung zur Prismendruckfestigkeit bei einer Belastungsdauer von 20min. definiert ist. Die für den 2-min. Versuch gültigen Würfeldruckfestigkeiten sind deswegen in die Prismendruckfestigkeiten bei 20-minütiger Belastungsdauer umzurechnen. Für zentrische Belastung gilt näherungsweise:

$$f_{c,cyl(20min)} = 0.85 \cdot 0.96 \cdot f_{c,cube(2min)}, \quad (6.1-1)$$

wobei der Wert 0.85 den Umrechnungsfaktor für die Druckfestigkeit von Würfeln mit einer Kantenlänge von 200mm zur Druckfestigkeit von Zylindern Ø150mm, h = 300mm nach DIN 1045 [6.3] darstellt. Mit dem Faktor 0.96 wird dem Sachverhalt, daß die Betonfestigkeit nach 20-minütiger Belastung nur noch etwa 96% der Festigkeit nach 2-minütiger Belastungsdauer beträgt, Rechnung getragen. Die rechnerischen Prismendruckfestigkeiten nach 20-minütiger Belastung betragen:

$$f_{c,cube,(2\min)} = 40 \text{ N / mm}^2 \rightarrow f_{c,cyl(20\min)} = 32.6 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$f_{c,cube,(2\min)} = 60 \text{ N / mm}^2 \rightarrow f_{c,cyl(20\min)} = 49.0 \text{ N/mm}^2$$

und stellen zugleich die Bezugsfestigkeiten für den Kriechzahlerhöhungsfaktor dar.

Bei ausmittigem Lasteintrag sinkt die Prismendruckfestigkeit in Abhängigkeit der Exzentrizität ab. Ein Vorschlag zur Berücksichtigung dieses Einflusses ist graphisch in [6.4] bzw. geringfügig modifiziert in [6.5] enthalten. Danach muß die Betonfestigkeit bei einer Lastexzentrizität von $e/d = 0.1$ auf $\approx 77\%$ abgemindert werden.

Die für die Berechnung notwendigen linearen Kriechzahlen werden direkt aus den Versuchen ermittelt. Zunächst werden die Kriechzahlen $\varphi_{vers,0.4}$ aus den Deformationen der zentrischen Kriechversuche bei einem Belastungsgrad $\eta = 0,4$ über die Beziehung

$$\varphi_{vers,0.4} = \frac{\varepsilon_{ges,0.4} - \varepsilon_{el,0.4}}{\varepsilon_{el,0.4}} \quad (6.1-2)$$

bestimmt. Die elastischen Dehnungen ergeben sich dabei aus dem Elastizitätsgesetz. Aus Parallelversuchen wurden in [6.2] folgende Werte des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit ermittelt:

$$f_{c,cube,(2\min)} = 40 \text{ N / mm}^2 \rightarrow E_c = 3180 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$f_{c,cube,(2\min)} = 60 \text{ N / mm}^2 \rightarrow E_c = 3800 \text{ N/mm}^2 .$$

Der Elastizitätsmodul muß als über den Zeitraum konstante Größe in die Berechnung eingeführt werden, da bei der Bestimmung der Kriechzahlen mit Gl.(6.1-2) eine über den Zeitraum konstante elastische Dehnung vorausgesetzt wird.

Die Berechnungen erfolgen unter Verwendung des Kriechzahlerhöhungsfaktors nach Gl.(2.4.3-11). Dieser Überproportionalitätsfaktor besitzt bei einem Belastungsgrad $\eta = 0,4$ bereits einen Wert von etwa 1.1, so daß man die für die Berechnung maßgebenden linearen Kriechzahlen φ_{lin} durch Abminderung der Kriechzahl $\varphi_{vers,0.4}$ erhält:

$$\varphi_{lin} = \frac{\varphi_{vers,0.4}}{1.1} . \quad (6.1-3)$$

Aufgrund der unter exzentrischer Belastung zu erwartenden Spannungsumlagerungen innerhalb des Querschnitts muß eine alterungsabhängige Funktion gefunden werden, die die ermittelten Kriechzahlen φ_{lin} näherungsweise beschreibt, da nach der Theorie des elastisch kriechenden Körpers jeder Spannungsänderung eine andere, von t und τ abhängige, Kriechfunktion zugeordnet wird. Im Ergebnis von Vergleichsrechnungen kann eingeschätzt werden, daß der Verlauf der zeitlichen Kriechzahlentwicklung relativ gut durch die im EC2 vorgeschlagene Kriechfunktion approximiert wird, wenn eine Korrektur der Kriechfunktion mit dem Abminderungsfaktor $k \cong 0.77$ erfolgt. In Abb. 6.1-1 sind die der Berechnung zugrundeliegenden linearen Kriechzahlen dargestellt, die sowohl für zentrische als auch für exzentrische Belastung Gültigkeit besitzen. Dabei ist auffällig, daß die Kriechzahlen trotz

unterschiedlichem Belastungsbeginn und unterschiedlicher Betonfestigkeit annähernd identisch sind. In diesem Fall gleichen sich die gegensätzlichen Einflüsse aus Belastungsalter und Betonfestigkeit nahezu aus.

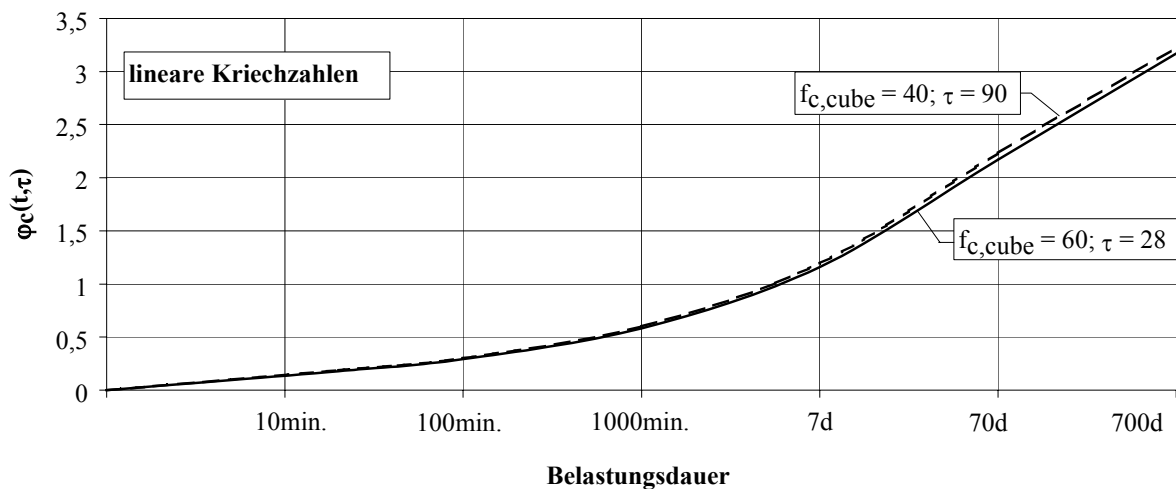


Abb.6.1-1: Lineare Kriechzahlen $\varphi_{lin} = k \cdot \varphi_{EC2}$

Die Ausgleichung der Versuche durch *Grasser/Kraemer* [6.1] erfolgte nach Bereinigung der Versuchsergebnisse von den Schwinddehnungen. Aus diesem Grund werden auch bei den Versuchsnachrechnungen die Schwinddehnungen nicht berücksichtigt.

Die Abmessungen der Probekörper betragen 60×15×10 cm, wobei die exzentrische Lasteintragung in Richtung der breiteren Querschnittsseite erfolgte. Für die Berechnung wird der Querschnitt in 15 Schichten mit je 1cm Dicke unterteilt. Der Einfluß des Biegemoments jeder einzelnen Schicht wird dabei vernachlässigt. Eine größere Schichtenanzahl brachte keine nennenswerten Ergebnisveränderungen.

Mit der Anwendung des Schichtenmodells kann auf die Definition einer, von *Grasser/Kraemer* [6.1] vorgeschlagenen, zusätzlichen nichtlinearen Krümmungskriechzahl verzichtet werden, da jeder Schicht in Abhängigkeit von ihrem Spannungsniveau eine andere Kriechzahl zugeordnet wird. Das nichtlineare Anwachsen der durch das Kriechen hervorgerufenen Krümmung ergibt sich automatisch aus der Voraussetzung ebener Querschnitte.

Ein weiterer Vorteil des Schichtenmodells ist die Möglichkeit des Festlegens von Spannungsgrenzwerten für jede einzelne Schicht, so daß Teilplastisierungen im Querschnitt in einfacher Form erfaßt werden können.

Bei der Analyse der exzentrisch belasteten Prismen ist eine zusätzliche Diskretisierung über die Probekörperhöhe erforderlich, da die Berechnung unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Einflüsse durchgeführt werden soll. Die Probekörpergeometrie wird dabei durch sieben Stützstellen im Abstand von je 10 cm beschrieben. Durch die geometrisch nichtlineare Berechnung werden im Vergleich zur Berechnung nach Theorie I.Ordnung Ergebnisverbesserungen erzielt, die in Abhängigkeit vom Belastungsgrad bis zu 13% betragen können.

Die Diskretisierung des Gesamtzeitraums erfolgt durch eine logarithmische Intervallteilung mit 6 Zeitintervallen. Zu den Zeitpunkten, an denen der Beton seine minimale Festigkeit erreicht, werden zusätzliche Berechnungsschritte eingeführt.

Bei der Gegenüberstellung der Versuchsergebnisse mit den berechneten Werten (Abb.6.1-2 und 6.1-4) läßt sich eine befriedigende Übereinstimmung feststellen. Die größten Abweichungen ergeben sich bei exzentrisch belasteten Probekörpern bei einem Belastungsgrad von $\eta = 0.8$. Dabei ist zu berücksichtigen, daß in diesen Fällen geringfügige Veränderungen der Eingangswerte zu verhältnismäßig großen Ergebnisunterschieden führen. Aus der Variation des Parameters c_{λ} , der den Einfluß der Lastexzentrizität auf die Betonfestigkeit beschreibt, von 0.77 analog [6.5] auf 0.75 analog [6.4] resultieren bis zu 9%-ige Dehnungsunterschiede. Die Erklärung dafür ist einerseits in dem steilen Funktionsanstieg des Kriechzahlerhöhungsfaktors im Bereich hoher Belastungsgrade zu suchen, andererseits führt eine geringfügige Erhöhung der Belastung zur Plastizierung zusätzlicher Querschnittsfasern, was aufgrund des sprunghaften Steifigkeitsabfalls ein weiteres Anwachsen der Deformationen nach sich zieht.

Zusätzlich zu den Vergleichskurven sind in den Abb.6.1-3 und 6.1-5 die berechneten zeitlichen Entwicklungen der Betonspannungen bei exzentrischer Belastung innerhalb eines Querschnitts dargestellt. Daraus ist zu entnehmen, daß bei hohen Belastungsgraden erhebliche Spannungsumlagerungen von den Randfasern auf die inneren Querschnittsfasern stattfinden, so daß sich ein nichtlinearer Betonspannungsverlauf über die Querschnittsdicke ergibt. Das Anwachsen der Randspannungen am stärker gedrückten Rand bei langen Belastungsdauern wird durch unterschiedliche Einflüsse hervorgerufen.

Einerseits werden durch die Zusatzverformungen infolge geometrisch nichtlinearer Effekte zusätzliche Biegemomente erzeugt, aus denen eine Veränderung des elastischen Dehnungszustandes zum jeweiligen Betrachtungszeitraum resultiert. Die dadurch hervorgerufenen größeren Randspannungen entwickeln sich ab einem bestimmten Zeitpunkt schneller als die querschnittsinternen Spannungsumlagerungen.

Der zweite Grund für das Ansteigen der Betonrandspannungen ergibt sich aus der zeitabhängigen Entwicklung der Betondruckfestigkeit. Bei sehr hohem Belastungsgrad ($\eta = 0.8$) erreichen die Randspannungen am stärker gedrückten Rand die Betonfestigkeit, so daß der Querschnitt teilweise plastiziert. Da die Druckfestigkeit über den Zeitraum nicht konstant ist, nimmt die Größe des plastizierten Bereiches zunächst bis zum Erreichen der kritischen Standzeit, an der der Beton seine geringste Druckfestigkeit aufweist, zu. Durch die fortschreitende Hydratation schließen sich die in der Betonstruktur gebildeten Mikrorisse zum Teil wieder, so daß der Beton in der Lage ist, weitere Druckspannungen aufzunehmen. Die Größe des plastizierten Bereiches nimmt wieder ab. Dabei ist zu erwähnen, daß sich die eben genannten Einflüsse, Spannungsumlagerung im Querschnitt, geometrisch nichtlineare Effekte und „Selbstheilung“ des Betons, in komplexer Weise untereinander beeinflussen, so daß die dargestellte Spannungsentwicklung nur für diesen konkreten Fall Gültigkeit besitzt.

Die Abnahme der Spannungen am weniger gedrückten Rand entsteht dadurch, daß sich infolge nichtlinearem Kriechen am gegenüberliegenden Rand wesentlich größere Kriechdehnungen als am betrachteten Rand einstellen. Bei Entkopplung der einzelnen Querschnittsfasern würde daraus eine nichtlineare Dehnungsverteilung über den Querschnitt resultieren. Aufgrund der Voraussetzung ebenbleibender Querschnitte wird eine elastische Deformation in entgegengesetzter Richtung am weniger gedrückten Rand erzwungen, die mit einer Abnahme der Randspannung einhergeht.

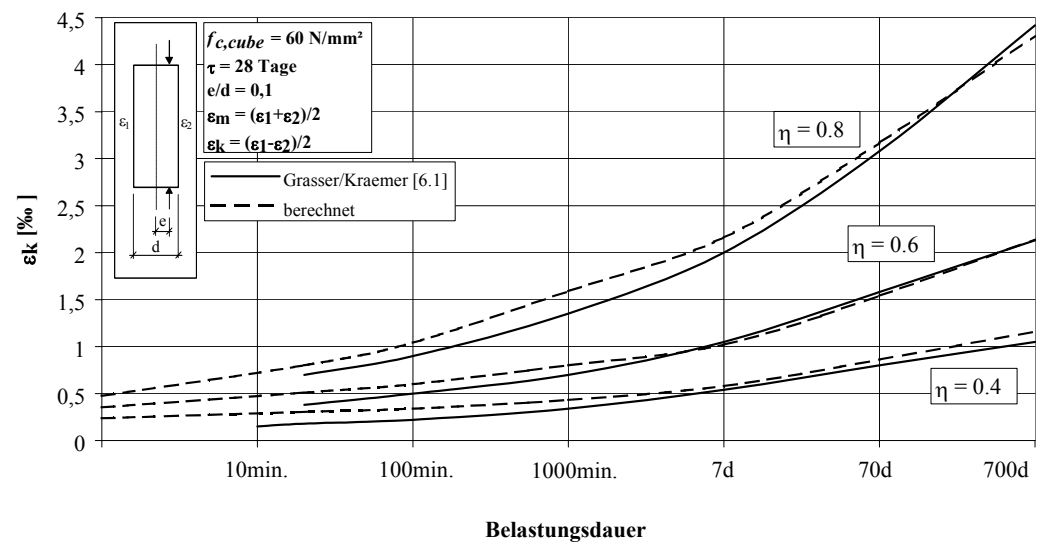
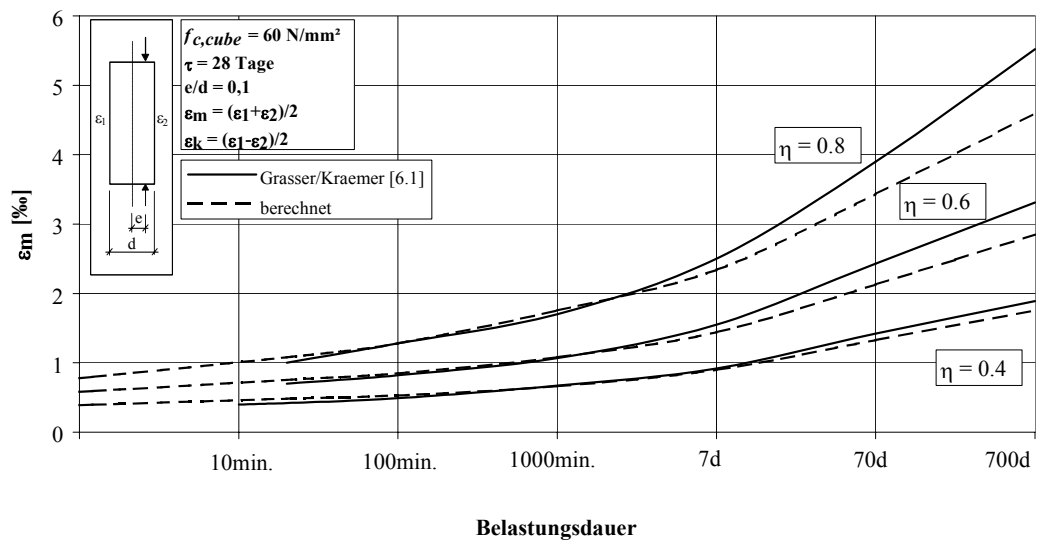
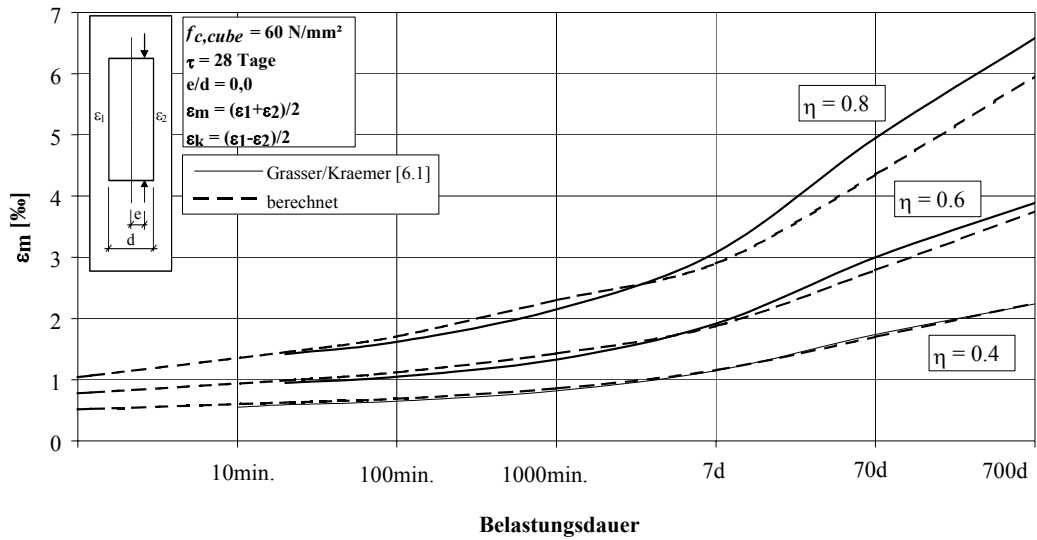


Abb.6.1-2: Vergleich der berechneten Deformationen mit den Versuchsergebnissen von Grasser/Kraemer [6.1] ($f_{c,cube} = 60 \text{ N/mm}^2$; $\tau = 28 \text{ Tage}$)

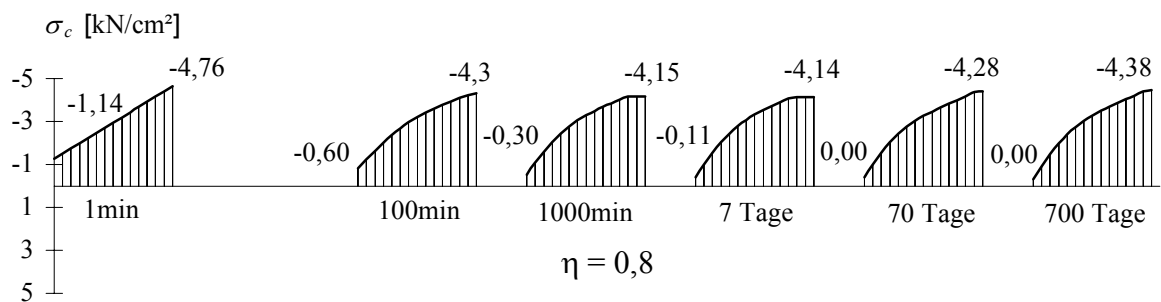
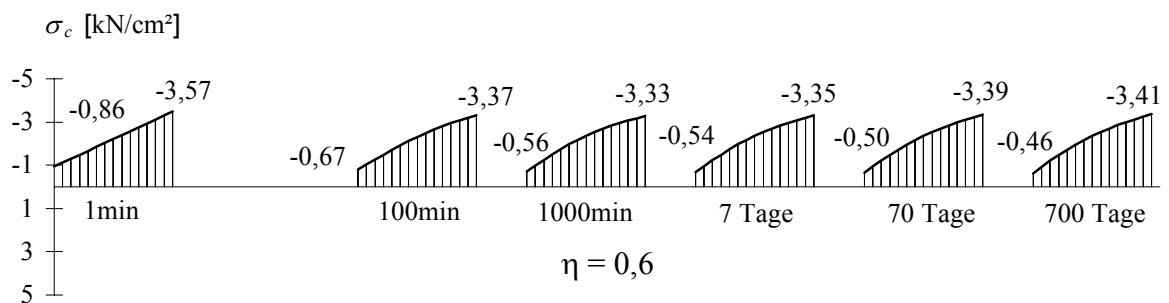
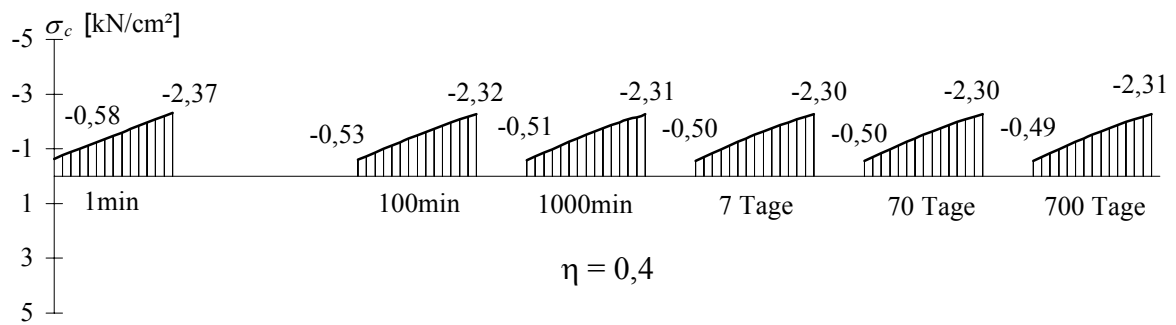
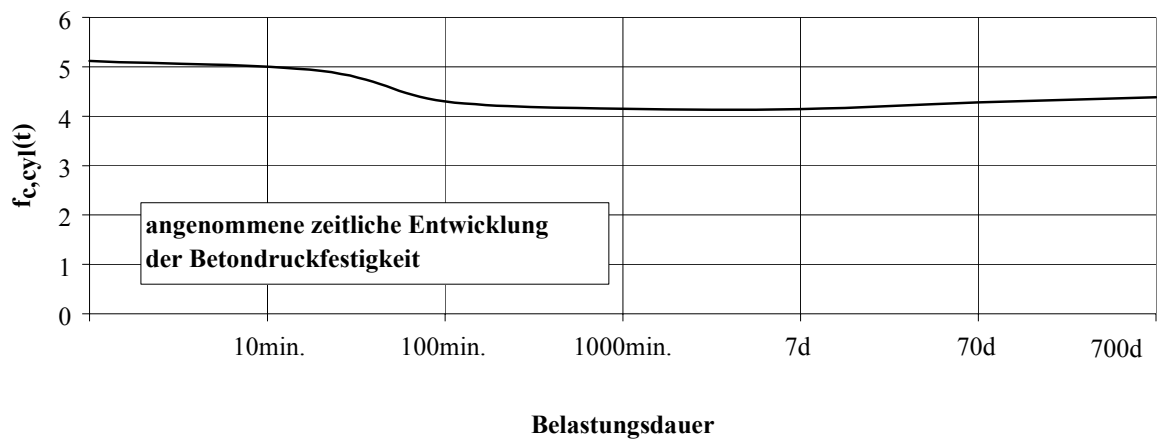


Abb.6.1-3: Betonspannungsentwicklung unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Betonfestigkeit für verschiedene Belastungsgrade ($f_{c,cube} = 60 \text{ N/mm}^2$; $\tau = 28 \text{ Tage}$)

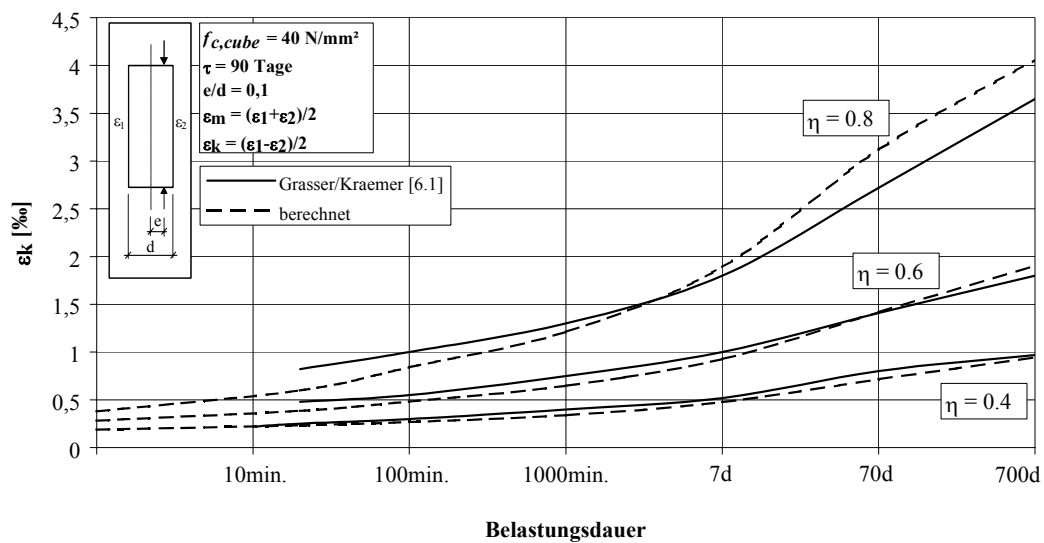
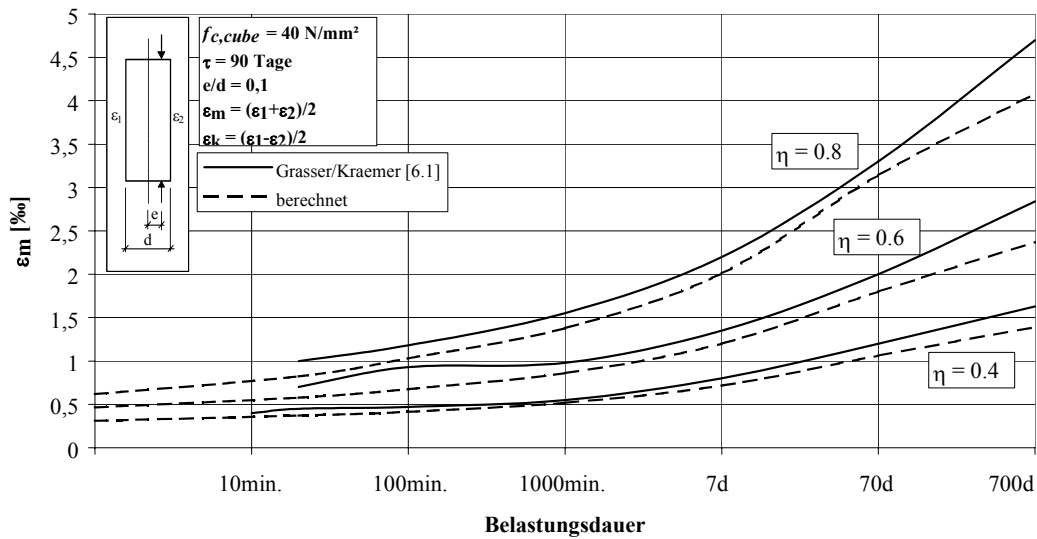
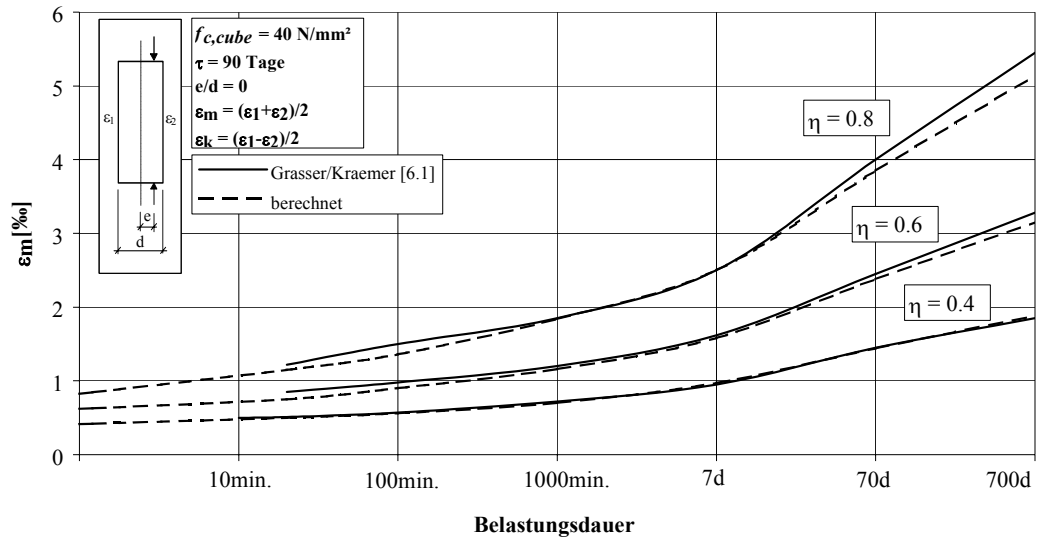


Abb.6.1-4: Vergleich der berechneten Deformationen mit den Versuchsergebnissen von Grasser/Kraemer [6.1] ($f_{c,cube} = 40 \text{ N/mm}^2$; $\tau = 90 \text{ Tage}$)

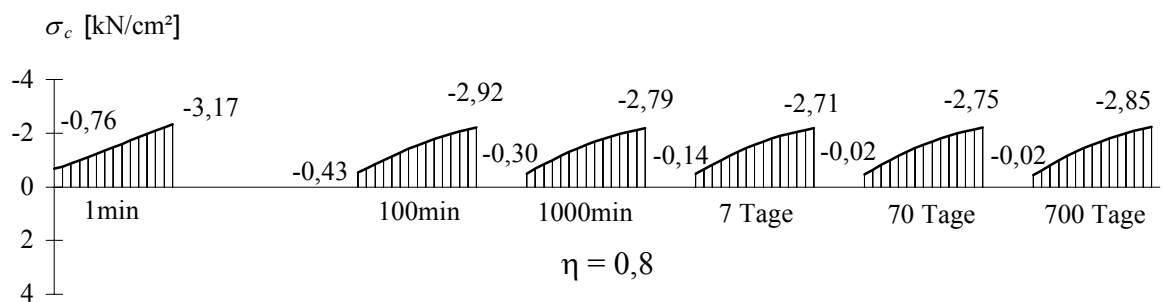
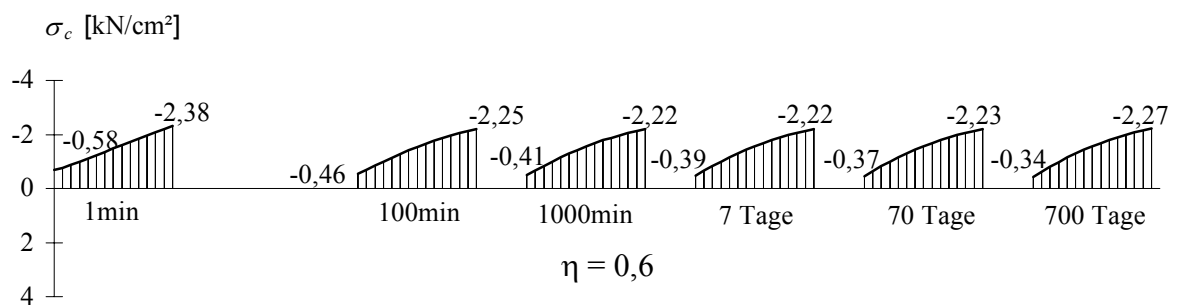
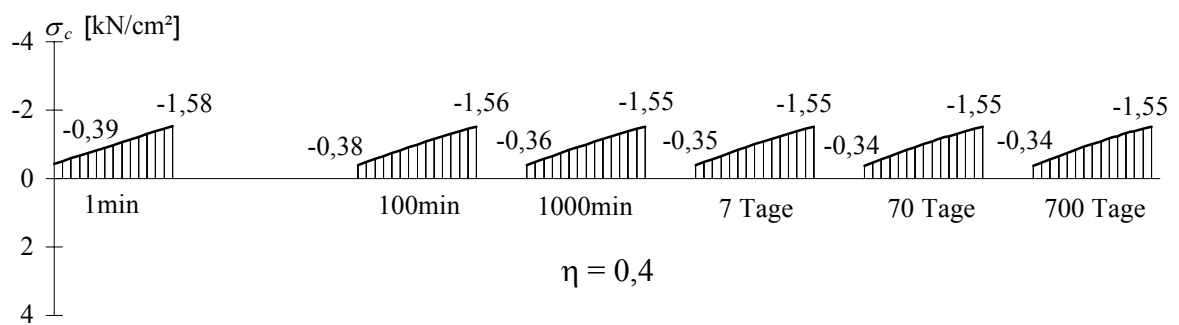
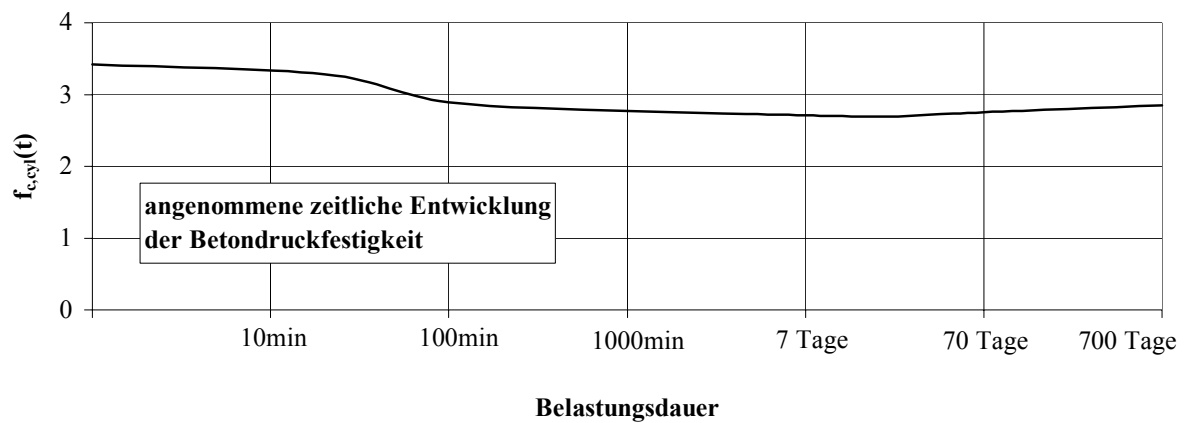


Abb.6.1-5: Betonspannungsentwicklung unter Berücksichtigung der zeitabhängigen Betonfestigkeit für verschiedene Belastungsgrade ($f_{c,cube} = 40 \text{ N/mm}^2$; $\tau = 90 \text{ Tage}$)

In Abb.6.1-6 ist der Einfluß unterschiedlicher Kriechzahlerhöhungsfaktoren auf die zeitliche Entwicklung der Deformationen dargestellt. Zusätzlich wird die nach linearer Kriechtheorie berechnete Kurve angegeben. Die Vergleichsrechnungen werden anhand der in Abb. 6.1-2 dargestellten Prismen durchgeführt, so daß die aus den Versuchsergebnissen resultierenden Kurven als Anhaltspunkt für die Wirklichkeitsnähe der einzelnen Materialgesetze verwendet werden kann. Dabei sei darauf hingewiesen, daß sich die Verhältnisse bei Zugrundelegen anderer Versuchsdaten erheblich verschieben können.

Untersucht werden die vier in Abschnitt 2.4.3 angegebenen Funktionen zur Beschreibung des Kriechzahlerhöhungsfaktors. Dabei wird jeweils die gleiche Betonfestigkeit (Prismendruckfestigkeit bei 20-minütiger Belastungsdauer) als Bezugswert für die nichtlineare Kriechfunktion verwendet. Für alle Berechnungen wird die gleiche lineare Kriechfunktion sowie die gleiche zeitliche Entwicklung der Betondruckfestigkeit vorausgesetzt.

Aus den Vergleichsrechnungen geht hervor, daß die Kriechverformungen bis zu einem Belastungsgrad $\eta = 0.6$ unabhängig vom verwendeten Kriechzahlerhöhungsfaktor in einer ähnlichen Größenordnung liegen. Bei weiterer Erhöhung der Belastung treten erhebliche Unterschiede auf, die bis zu 30% betragen können.

Die Anwendung des Kriechzahlerhöhungsfaktors nach *Bazant/Kim* Gl.(2.4.3-7) bei exzentrischer Belastung führt bei einem Belastungsgrad von 0.8 bereits im zweiten Zeitschritt zu numerischen Schwierigkeiten, die daraus resultieren, daß die Funktion bei einem Spannungsniveau von 1.0 gegen unendlich strebt. Das gleiche ist bei weiterer Erhöhung der Belastung für den Faktor nach *Bazant/Prasannan* zu erwarten, so daß diese beiden Funktionen bei extremer Betonbeanspruchung im Zusammenhang mit dem in der Arbeit entwickelten Berechnungsmodell nicht geeignet sind.

Numerisch stabile Ergebnisse erhält man dagegen bei Anwendung der Funktionen nach EC2 (Gl.(2.4.3-2)) und *Grasser/Kraemer* (Gl.(2.4.3-11)). Die Berechnung mit dem im EC2 angegebenen Kriechzahlerhöhungsfaktor ergibt im vorliegenden Fall bis zu 15% größere Deformationen im Vergleich zur Anwendung des Kriechzahlerhöhungsfaktors nach Gl.(2.4.3-11). Der qualitativ andere Verlauf der zeitabhängigen Deformationen bei Anwendung des Kriechzahlerhöhungsfaktors nach *Grasser/Kraemer* im Vergleich zu den übrigen Kurvenverläufen ergibt sich aus der Berücksichtigung der ansteigenden Nichtlinearität des Kriechens bei kürzer werdender Belastungsdauer.

Abschließend ist darauf hinzuweisen, daß die näherungsweise Berechnung unter Voraussetzung der linearen Kriechtheorie bereits bei einem Belastungsgrad $\eta = 0.6$ zu einer 30%-igen Unterschätzung der Deformationen führt. Bei einem Belastungsgrad von 0.8 liegt die Abweichung gegenüber den Versuchsergebnissen zum Teil über 40%. Dabei werden bei exzentrischer Belastung größere Abweichungen als bei zentrischem Lasteintrag festgestellt.

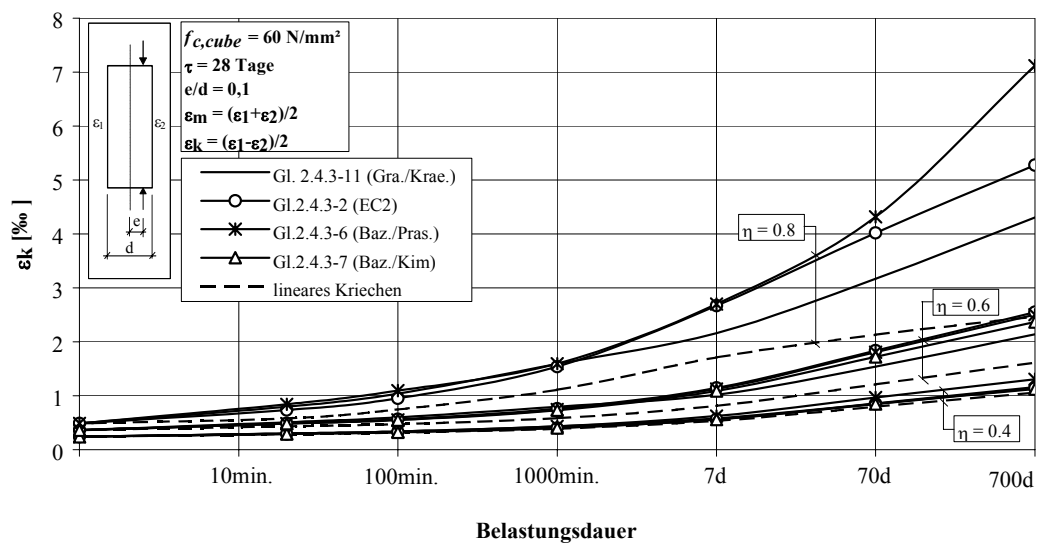
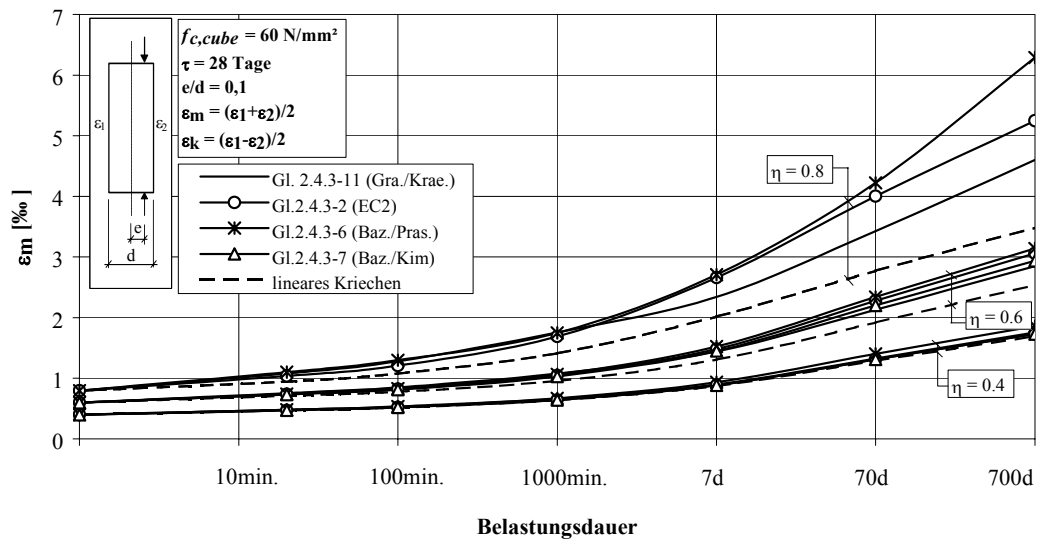
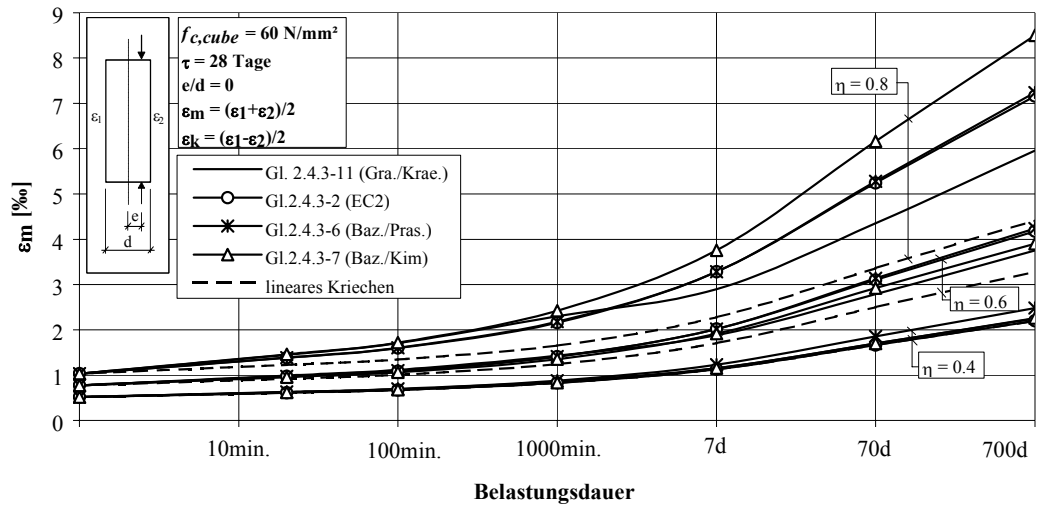


Abb.6.1-6: Auswirkungen der verschiedenen Kriechzahlerhöhungsfaktoren auf die Kriechdeformationen

6.2 Schlanke Stahlbetonstützen

6.2.1 Einleitung

Versuchsauswertungen zum Langzeitverhalten von Stahlbetondruckgliedern finden sich in [6.6], [6.7], [6.8], [6.9], [6.10]. Zur Verifikation des Berechnungsmodells werden vergleichende rechnerische Untersuchungen zu den Stützenversuchen von *Ramu et al.* [6.10] durchgeführt.

Von den 37 durchgeführten und in [6.10] veröffentlichten Versuchen (darunter 6 Kurzzeitversuche) werden insgesamt 6 Versuchsstützen analysiert, die zum Teil unterschiedliche Schlankheiten, Lastexzentrizitäten und Belastungshöhen aufweisen. Die Anzahl der in Frage kommenden Stützen ist dabei von vornherein eingeschränkt, da für einen Großteil der Stützen keine Angaben über das Kriechverhalten des verwendeten Betons vorhanden sind. Die Abmessungen und Materialkenngrößen sowie die zeitliche und räumliche Diskretisierung der betreffenden Stützen sind in Abschnitt 6.2.2 dargestellt und erläutert.

Um die Ergebnisse der Vergleichsrechnungen im Hinblick auf die Wirklichkeitsnähe und die Genauigkeit des Berechnungsmodells werten zu können, sind in Abschnitt 6.2.4 die Ergebnisse einer Parameterstudie dargestellt, die sich auf den Einfluß der Materialkenngrößen und auf die Auswirkungen der Tragwerksdiskretisierung beziehen.

6.2.2 Geometrische Abmessungen und Materialkenngrößen der untersuchten Stützen

Die zu untersuchenden Stützen weisen Schlankheiten von $\lambda = 100$ (Stützen 13, 23, 51 und 52) bzw. $\lambda = 150$ (Stützen 65 und 66) auf. Um ein Ausknicken der Stützen senkrecht zur Beanspruchungsrichtung auszuschließen, wurde die Belastung im Versuch planmäßig exzentrisch in Richtung der schwachen Achse aufgebracht.

Alle untersuchten Stützen waren auf der Zug- und Druckseite symmetrisch bewehrt, wobei der geometrische Bewehrungsgrad mit $\mu_{\text{ges}} = 1.7\%$ angegeben wird. Die Längs- und Bügelbewehrung bestand aus kaltverformten Stahl mit einer $\sigma_{0.2}$ -Grenze von 46.1 kN/cm^2 und einer Festigkeit von 55.3 kN/cm^2 . Der Elastizitätsmodul wurde in Parallelversuchen mit $E_s = 20550 \text{ kN/cm}^2$ ermittelt.

Für die Vergleichsrechnung wird die Stahlkennlinie durch das *Ramberg-Osgood-Polynom* (Gl. 3.1-2) approximiert.

Die Materialkenngrößen des Betons sind in [6.10] nicht vollständig angegeben, so daß es notwendig ist, für die theoretischen Untersuchungen einige Festbetoneigenschaften über Näherungsbeziehungen zu ermitteln. Aufgrund der Streuung der Materialkennwerte sind die mit dieser Methode errechneten Festigkeits- und Formänderungskenngrößen des Betons mit relativ großen Unsicherheiten behaftet. Nachfolgend wird die Vorgehensweise zur Ermittlung der notwendigen Kennwerte erläutert.

Zunächst werden die Würfeldruckfestigkeiten, gemessen an parallel zu den Stützen hergestellten Probekörpern, in Prismendruckfestigkeiten unter Berücksichtigung 20-minütiger Lastdauer über die Beziehung Gl. (6.1-1) umgerechnet. Die errechnete Prismendruckfestigkeit stellt analog zum vorangegangenen Abschnitt die Bezugsfestigkeit für die Nichtlinearität des Kriechens dar.

Die Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen erfolgt durch die in Abschnitt 5.4.8 beschriebene Vorgehensweise, wobei die rechnerische Zugfestigkeit f_{ct} mit Hilfe der in MC 90 angegebenen Formel aus der Prismendruckfestigkeit bestimmt wird. In Anlehnung an [6.11] wird davon ausgegangen, daß sich der erste Riß bei einer

Zugspannung, die dem 5%-Quantil der zentrischen Zugfestigkeit entspricht, bildet, so daß mit Gl.(2.2.2-3) gilt:

$$f_{ct,0.05} = 0.095 \cdot \left(f_{c,cyl(20\min)} \right)^{2/3} \quad (6.2.2-1)$$

Zur Abschätzung des Verformungsverhaltens des verwendeten Betons unter Dauerbelastung wurden in [6.10] parallel zu den Stützenversuchen Kriech- und Schwindversuche an Probekörpern durchgeführt. Aus den gemessenen Dehnungsverläufen wurden die Kriechzahlen über die Beziehung:

$$\varphi_c(t) = \frac{\varepsilon_{tot}(t) - \varepsilon_{in} - \varepsilon_{c,sh}(t)}{\varepsilon_{in}} \quad (6.2.2-2)$$

bestimmt. Dabei ist ε_{in} die sich sofort nach Aufbringen der Spannung einstellende elastische Dehnung.

Aufgrund der permanenten Spannungsumlagerungen innerhalb der Stützenquerschnitte sowie entlang der Stützenachse ist es wie schon in Abschnitt 6.1 notwendig, eine Annahme über den Verlauf der Kriechfunktion für spätere Belastungszeitpunkte zu treffen. Die Annäherung an die gemessenen Kurven erfolgt mit Hilfe der in Abschnitt 2.4.4 vorgestellten Vorhersageverfahren. Dabei ergeben sich in Abhängigkeit der Form der Kriechkurven unterschiedliche Vorhersagefunktionen, die eine gute Approximation der ermittelten Kriechverläufe liefern:

Stützen 13 und 23: EC2,
 Stützen 51 und 52: DIN 4227,
 Stützen 65 und 66: Bazant/Kim.

Um eine gleichwertige Größenordnung der Kriechzahlen wie in den Versuchen zu erzielen, ist eine Variation einzelner Parameter innerhalb des Vorhersageverfahrens vorzunehmen. Mit den variierten Parametern können im Anschluß die Kriechfunktionen für spätere Belastungszeitpunkte ermittelt werden. In den nachfolgenden Tafeln ist unter anderem die Übereinstimmung der für die Berechnung angenommenen Funktionen der Kriechzahl mit den gemessenen Kurven dargestellt.

Bei dem zu Stütze 23 gehörigen Kriechversuch lag ein verhältnismäßig hohes Spannungsniveau ($\sigma_c / f_{c,cyl(20\min)} \approx 0.54$) vor, so daß sich die gemessenen Kriechdehnungen aus einem linearen und einem nichtlinearen Anteil zusammensetzen. Da die Nichtlinearität des Kriechens in dem Berechnungsmodell gesondert berücksichtigt wird, werden in diesem Fall die gemessenen Kriechzahlen mit dem Quotienten $1 + (0.54)^3 = 1.16$ abgemindert.

Aufgrund der fehlenden Angaben über das Langzeitverhalten des in Stütze 13 verwendeten Betons werden näherungsweise die für Stütze 11 gültigen Kriechzahlen bei der Berechnung vorausgesetzt, was wegen der nahezu identischen zeitlichen Festigkeitsentwicklung der beiden Betone gerechtfertigt erscheint.

Die Schwindversuche sind in [6.10] nicht dokumentiert, so daß die Schwindmaße für den jeweiligen Beton durch dieselben Vorhersageverfahren wie die Kriechzahlen (Abschnitt 2.3) abgeschätzt werden. Aus den Kriechversuchen werden auch die Elastizitätsmoduli der entsprechenden Betone abgeleitet, indem die aufgebrachte Spannung durch die gemessene sofort eintretende Dehnung ε_{in} dividiert wird.

Dabei ist zu erwähnen, daß der auf diese Weise ermittelte E-Modul nicht mit den in den heute gebräuchlichen Normen angegebenen Mittelwerten der E-Moduln vergleichbar ist, da in der sofort eintretenden Dehnung ein Teil der sich sehr schnell entwickelnden verzögert elastischen Dehnung eingeschlossen sein kann. Im Unterschied dazu erfolgt eine normengerechten E-Modulmessung im allgemeinen nach 10-maliger Be- und Entlastung der Probekörper, um den Einfluß inelastischer Verformungen auszuschließen.

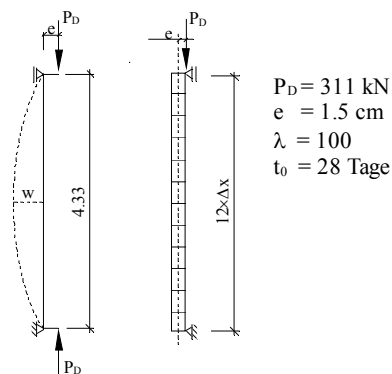
Da die zeitliche Entwicklung des E-Moduls bei der Berechnung der Kriechzahlen in [6.10] nicht berücksichtigt wurde, wird der E-Modul auch bei der Vergleichsrechnung als zeitlich konstant angenommen. Die Auswirkung der Variation des Elastizitätsmoduls auf die Berechnungsergebnisse wird in Abschnitt 6.2.4 diskutiert.

Die Stützen werden entlang der Stabachse durch Anordnung von 13 Stützstellen näherungsweise beschrieben, an denen die Zerlegung der Querschnitte in 15 Schichten gleicher Dicke erfolgt. Im Abschnitt 6.2.4 wird näher auf den Einfluß der Fehler infolge räumlicher Diskretisierung auf die Berechnungsergebnisse eingegangen.

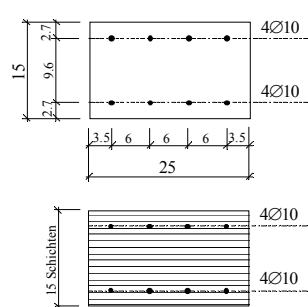
In den nachfolgenden Tafeln sind alle für die Berechnung wichtigen Kenngrößen und Näherungen für die einzelnen Stützen zusammengefaßt. Für die Stützen 51 und 52 bzw. 65 und 66 gelten dabei die gleichen Materialkennwerte, da sie aus dem jeweils gleichen Beton gefertigt wurden. Die Stützen 13 und 23 wurden unter labormäßigen Bedingungen hergestellt, so daß die geforderten Materialzusammensetzungen relativ genau eingehalten werden konnten. Im Unterschied dazu wurden die 4 anderen Stützen industriell gefertigt, wobei infolge schwankender Feuchtigkeiten der Zuschläge geringe Abweichungen von der geforderten Anmachwassermenge auftraten.

Tafel 6.2.2-1: Stütze 13

statisches System, Belastung und Diskretisierung



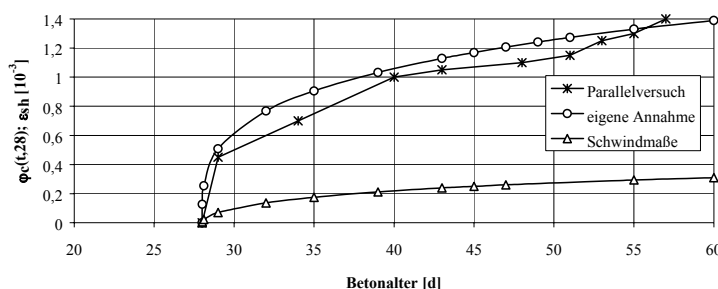
Querschnitt und Schichtenmodell



Bewehrungsgrad:
Zug: $\mu = 0.84\%$
Druck: $\mu' = 0.84\%$

Knickrichtung

Kriechzahlen und Schwindmaße



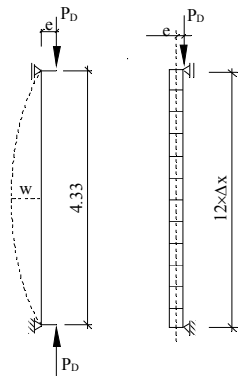
Materialkenngrößen:

Beton:
 $f_{c,cube,28} = 3.36 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{ct,0.05} = 0.19 \text{ kN/cm}^2$
 $E_c = 2150 \text{ kN/cm}^2$

Stahl:
 $f_{yk} = 46.10 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{tk} = 55.30 \text{ kN/cm}^2$
 $E_s = 20550 \text{ kN/cm}^2$

Tafel 6.2.2-2: Stütze 23

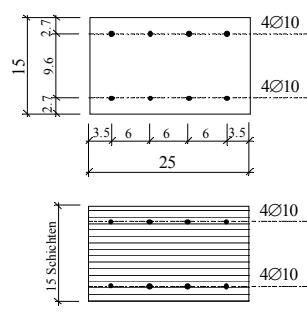
statisches System, Belastung und Diskretisierung



$P_D = 141 \text{ kN}$
 $e = 3.75 \text{ cm}$
 $\lambda = 100$
 $t_0 = 28 \text{ Tage}$

Kurzzeitversuch nach
 Versuchsabbruch:
 $P_D = 226 \text{ kN}$
 $t = 146 \text{ Tage}$

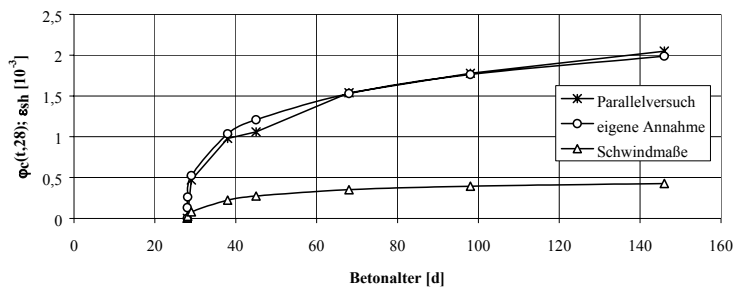
Querschnitt und Schichtenmodell



Bewehrungsgrad:
 Zug: $\mu = 0.84\%$
 Druck: $\mu' = 0.84\%$

Knickrichtung

Kriechzahlen und Schwindmaße



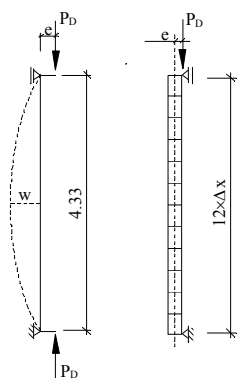
Materialkenngrößen:

Beton:
 $f_{c,cube,28} = 3.30 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{ct,0.05} = 0.18 \text{ kN/cm}^2$
 $E_c = 2115 \text{ kN/cm}^2$

Stahl:
 $f_{yk} = 46.10 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{tk} = 55.30 \text{ kN/cm}^2$
 $E_s = 20550 \text{ kN/cm}^2$

Tafel 6.2.2-3: Stützen 51 und 52

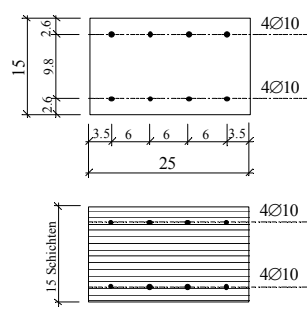
statisches System, Belastung und Diskretisierung



Stütze 51:
 $P_D = 438 \text{ kN}$
 $e = 0.50 \text{ cm}$
 $\lambda = 100$
 $t_0 = 28 \text{ Tage}$

Stütze 52:
 $P_D = 189 \text{ kN}$
 $e = 3.75 \text{ cm}$
 $\lambda = 100$
 $t_0 = 28 \text{ Tage}$
 Kurzzeitversuch nach
 Versuchsabbruch:
 $P_D = 224 \text{ kN}$
 $t = 105 \text{ Tage}$

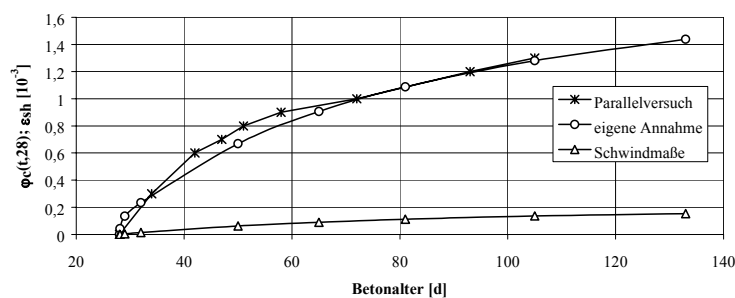
Querschnitt und Schichtenmodell



Bewehrungsgrad:
 Zug: $\mu = 0.84\%$
 Druck: $\mu' = 0.84\%$

Knickrichtung

Kriechzahlen und Schwindmaße



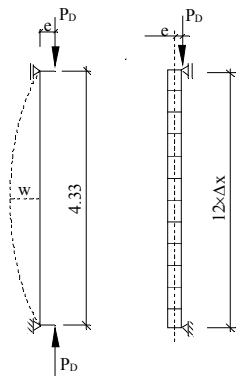
Materialkenngrößen

Beton:
 $f_{c,cube,28} = 4.71 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{ct,0.05} = 0.23 \text{ kN/cm}^2$
 $E_c = 2000 \text{ kN/cm}^2$

Stahl:
 $f_{yk} = 46.10 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{tk} = 55.30 \text{ kN/cm}^2$
 $E_s = 20550 \text{ kN/cm}^2$

Tafel 6.2.2-4: Stützen 65 und 66

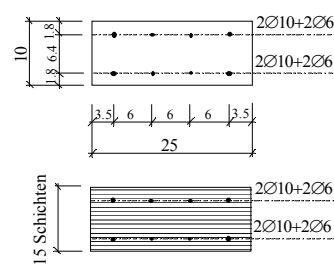
statisches System, Belastung und Diskretisierung



Stütze 65:
 $P_D = 159 \text{ kN}$
 $e = 0.50 \text{ cm}$
 $\lambda = 150$
 $t_0 = 28 \text{ Tage}$

Stütze 66:
 $P_D = 67 \text{ kN}$
 $e = 3.75 \text{ cm}$
 $\lambda = 150$
 $t_0 = 28 \text{ Tage}$

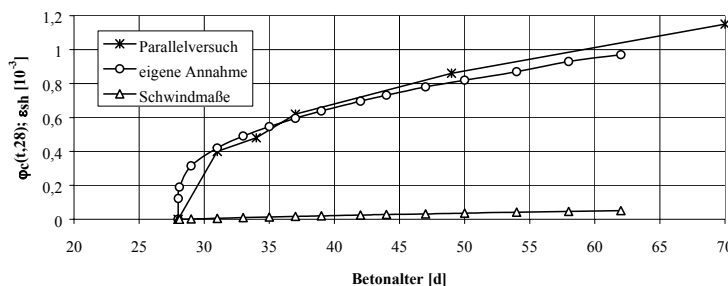
Querschnitt und Schichtenmodell



Bewehrungsgrad:
 Zug: $\mu = 0.86\%$
 Druck: $\mu' = 0.86\%$

Knickrichtung

Kriechzahlen und Schwindmaße



Materialkenngrößen

Beton:
 $f_{c,cube,28} = 3.11 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{ct,0.05} = 0.18 \text{ kN/cm}^2$
 $E_c = 1850 \text{ kN/cm}^2$

Stahl:
 $f_{yk} = 46.10 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{tk} = 55.30 \text{ kN/cm}^2$
 $E_s = 20550 \text{ kN/cm}^2$

6.2.3 Durchführung und Auswertung der Versuchsnachrechnungen

Die rechnerische Analyse erfolgt in zwei aufeinanderfolgenden Schritten. Im ersten Schritt werden die zeitabhängigen Auslenkungen und die Zusatzmomente aus Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen ermittelt. Das „Versmieren“ der Risse über die jeweilige Intervalllänge führt dabei zu geringeren Spannungen im Stahl und im Beton im Vergleich zu einer Betrachtung im gerissenen Querschnitt. Die Ursache dafür ist in dem durch den Ausfall der Betonzugzone bedingten Steifigkeitsabfall zu suchen. Daraus resultieren einerseits größere elastische Deformationen, die zu zusätzlichen Spannungen führen, andererseits muß der Ausfall der Betonzugzone durch den Bewehrungsstahl kompensiert werden.

Aus diesem Grund werden in einem nachfolgenden Berechnungsschritt die zeitabhängigen Spannungsentwicklungen im Rißquerschnitt ermittelt, wobei die im ersten Schritt ermittelten Schnittkräfte als Belastungsgrößen in das Problem eingehen und die rechnerische Betonzugfestigkeit gleich Null gesetzt wird. Dabei ist es notwendig, die Berechnung nach Theorie I.Ordnung durchzuführen, da die Zusatzmomente infolge Theorie II.Ordnung als Belastungsgrößen vorgegeben werden.

Die Ergebnisse der Versuchsnachrechnungen sind in den Tafeln 6.2.3-1..6 dargestellt. Aus den Tafeln wird ersichtlich, daß sich die Betrachtung im Riß im Vergleich zur „verschmierten“ Betrachtungsweise vor allem auf die Spannungen in der Zugbewehrung auswirkt. Die Unterschiede betragen bis zu 8 kN/cm² und damit immerhin 17% der Streckgrenze.

Der Vergleich mit den Versuchsergebnissen wird anhand der Gegenüberstellung der zeitlichen Entwicklung der Auslenkung in Stützenmitte vorgenommen. Zusätzlich sind zum Vergleich die mit Hilfe der linearen Kriechtheorie berechneten Auslenkungen angegeben.

Bei der Auswertung der Versuche stellen *Ramu et al* in [6.10] fest, daß grundsätzlich zwischen 3 qualitativ verschiedenen Belastungsdauer-Auslenkungskurven unterschieden werden kann:

$$1. \quad \frac{\partial w}{\partial t} \cong \text{const.}$$

Die Auslenkungen nehmen von Beginn an mit einer konstanten Geschwindigkeit zu, bis nach sehr kurzer Belastungsdauer der Bruch eintritt. Dieser Kurvenverlauf wurde beispielsweise bei Stütze 65 beobachtet.

$$2. \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} < 0 \quad \text{Phase 1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Phase 2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} > 0 \quad \text{Phase 3}$$

Die Geschwindigkeit des zeitabhängigen Deformationszuwachses nimmt in der Anfangsphase ab. Ab einer bestimmten Größe der Auslenkung weist die Kurve einen Wendepunkt auf, ab dem die Zunahme der Auslenkungen pro Zeiteinheit größer wird. Das Auftreten dieses Wendepunktes ist ein sicheres Zeichen für das spätere Versagen der betreffenden Stütze unter konstanter Dauerlast. Dieser Kurvenverlauf trat bei den Stützen 13 und 66 auf. Bei Stütze 51 wurde der Versuch vor Eintreten des Bruches abgebrochen. Da aber ein Ende des Auslenkungszuwachses nicht absehbar war, kann dieser Stützenversuch gleichfalls diesem Kurventyp zugeordnet werden.

$$3. \quad \frac{\partial w}{\partial t} \rightarrow 0.$$

Die Auslenkungen streben einem Endwert zu. Die Stützen, bei denen dieser Kurventyp beobachtet wurde, versagten innerhalb des Beobachtungszeitraums nicht, so daß der Bruch in einem abschließenden Kurzzeitversuch herbeigeführt wurde (Stützen 23 und 52).

Bei den theoretischen Untersuchungen wird ausnahmslos eine prinzipielle Übereinstimmung im Verlauf der gemessenen und der berechneten Auslenkungs-Zeit-Kurven festgestellt. Für die Abweichungen in der Größe der Auslenkungen gibt es verschiedene Ursachen, die größtenteils in den Unsicherheiten bei der Annahme der Materialkenngrößen zu suchen sind. Eine ausführliche Behandlung dieses Themas erfolgt in Abschnitt 6.2.4. Unter Berücksichtigung dieses Sachverhalts kann die Übereinstimmung der Ergebnisse zwischen Berechnung und Versuch als zufriedenstellend bezeichnet werden.

Die beste Übereinstimmung ergibt sich bei Versuchsstütze 23. Bei dem abschließenden Kurzzeitversuch wird allerdings rechnerisch kein Gleichgewicht mehr erzielt, so daß für diesen Lastfall keine Auslenkung angegeben werden kann. In diesem Beispiel treten praktisch keine Unterschiede zwischen linearer und nichtlinearer Kriechtheorie auf. Der Grund dafür kann leicht aus der angegebenen zeitlichen Spannungsentwicklung abgeleitet werden, nach der über den gesamten Betrachtungszeitraum ein relativ geringes Spannungsniveau vorhanden ist. Aus der mit wachsender Belastungsdauer abnehmenden Betonrandspannung folgt, daß die Spannungsumlagerungen vom Beton auf den Stahl infolge Kriechen und Schwinden schneller eintreten als das Anwachsen der Zusatzmomente infolge Kriechen und Theorie II.Ordnung. Bei solch einer Spannungsentwicklung blieben die Stützen im Versuch grundsätzlich, auch bei unendlich langer Belastungsdauer, in einem stabilen Zustand.

Bei Stütze 13 ist der Unterschied zwischen der Berechnung mit nichtlinearer bzw. linearer Kriechtheorie am deutlichsten. Das Versagen der Stütze tritt rechnerisch unter Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens nur wenige Tage nach dem Versagen der Stütze im Versuch ein, während sich die Stütze bei Berechnung mit linearer Kriechtheorie wesentlich länger im stabilen Zustand befindet.

In der Spannungsentwicklung dieser Stütze tritt, wie auch bei anderen Stützen, der Sachverhalt auf, daß im Bewehrungsstahl noch geringe Druckspannungen vorhanden sind obwohl der Beton in der gleichen Querschnittsfaser bereits gerissen ist. Dieses Phänomen ist auf die gegenseitige Beeinflussung der Spannungsumlagerungen infolge Kriechen und Schwinden und der Veränderung des elastischen Spannungszustandes, resultierend aus den Zusatzmomenten nach Theorie II.Ordnung, zurückzuführen (siehe Abb.6.2.3-1). Durch die Spannungsumlagerung vom Beton auf die Bewehrung wächst die Druckspannung im Stahl weiter an, während die Betonrandspannungen sowohl am mehr als auch am weniger gedrückten Rand abnehmen. Nach Überlagerung mit der Spannungsverteilung infolge der Zusatzmomente aus Theorie II.Ordnung ergibt sich, daß im Stahl weiterhin Druckspannungen vorhanden sind obwohl sich der Beton im gerissenen Zustand befindet.

Bei den Stützen 51 und 52 ist auffällig, daß die Kriechfunktion wesentlich flacher als bei den übrigen Stützen ansteigt. Dieser Trend setzt sich bei den Vergleichsrechnungen fort, bei denen der Anstieg der berechneten Zeit-Auslenkungskurven vor allem zu Beginn des Kriechens wesentlich geringer als der der gemessenen Kurven ist. Aufgrund dessen wird vermutet, daß in der im Parallelversuch ermittelten Anfangsdehnung ein Teil der sich sehr schnell entwickelnden verzögert elastischen Verformung bereits enthalten ist, so daß sowohl der Elastizitätsmodul als auch die Kriechzahlen zu klein abgeschätzt werden.

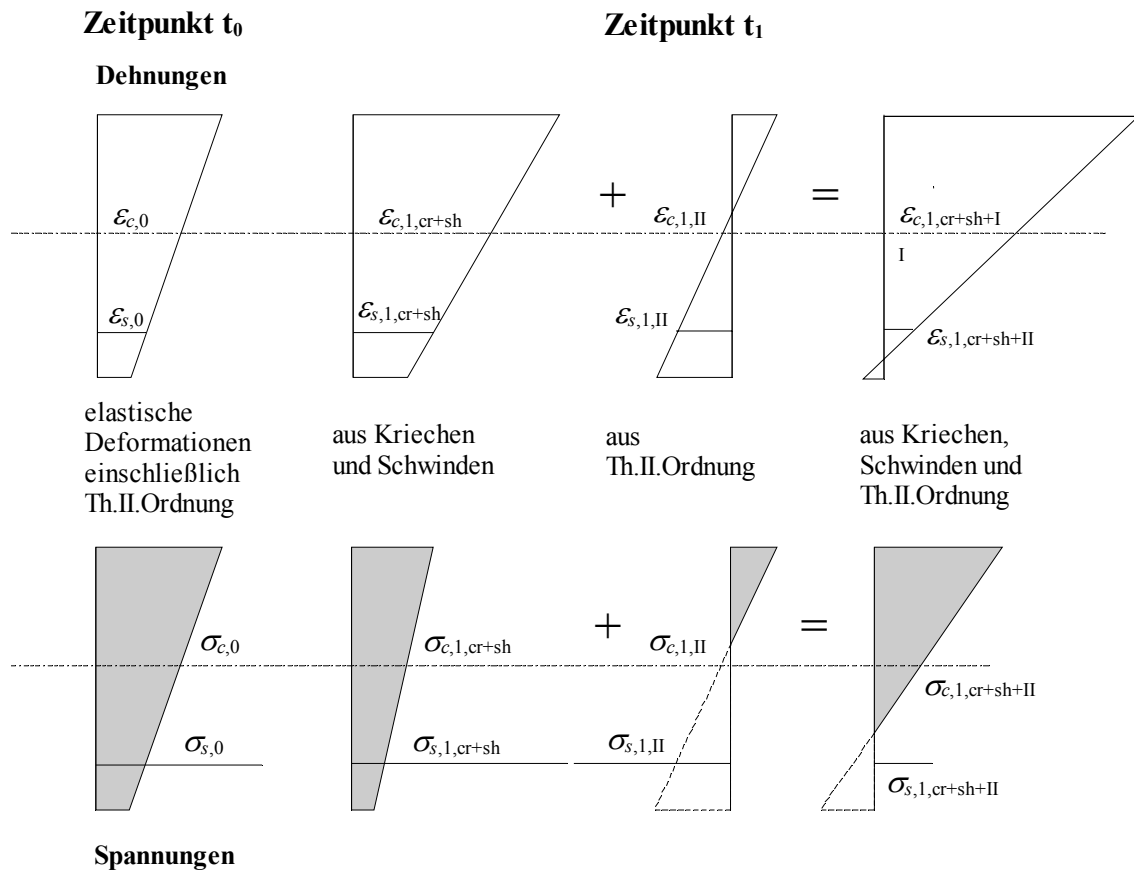
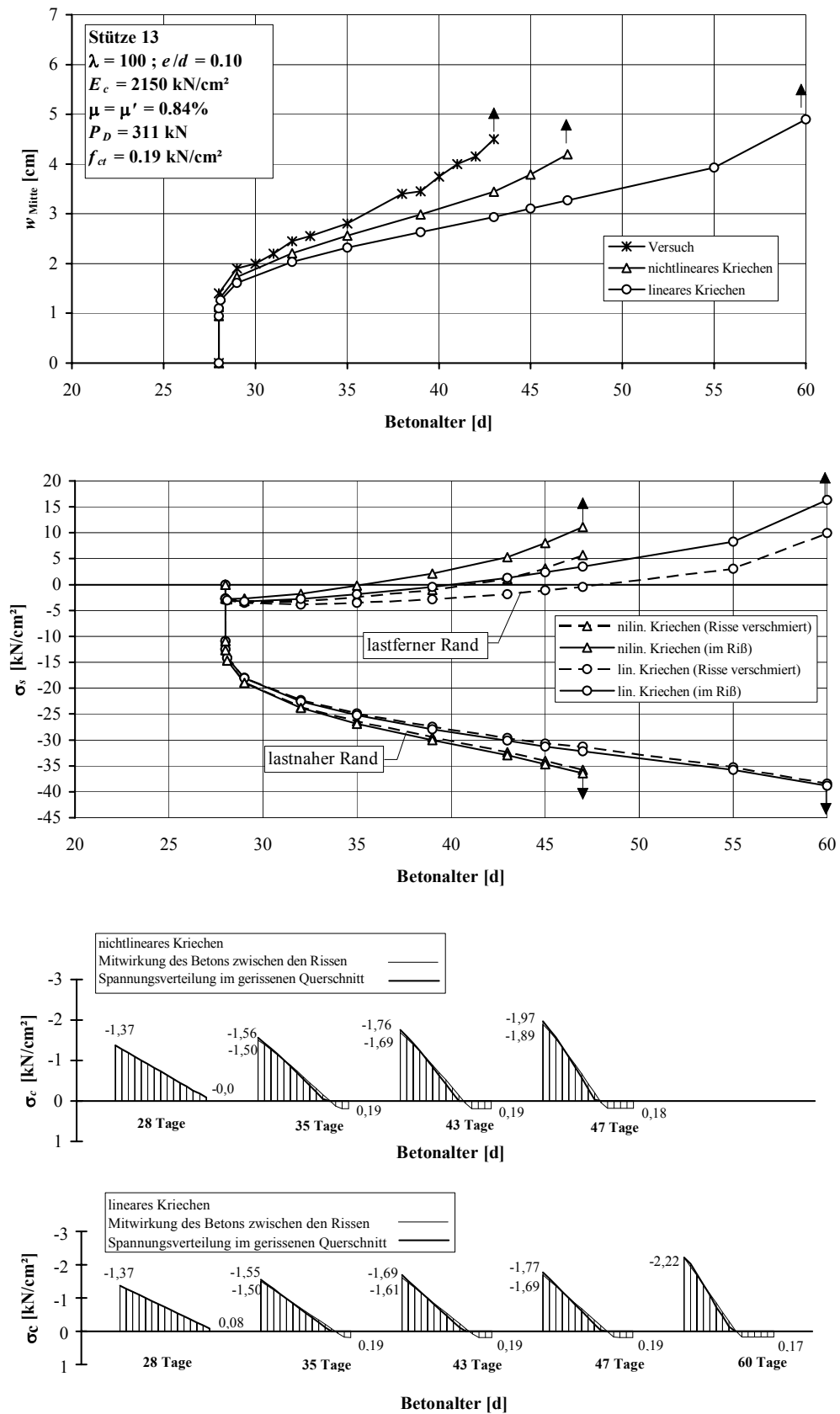


Abb.6.2.3-1: Dehnungs- und Spannungsentwicklung in einem Stahlbetonquerschnitt unter Berücksichtigung der Rißbildung und Theorie II.Ordnung

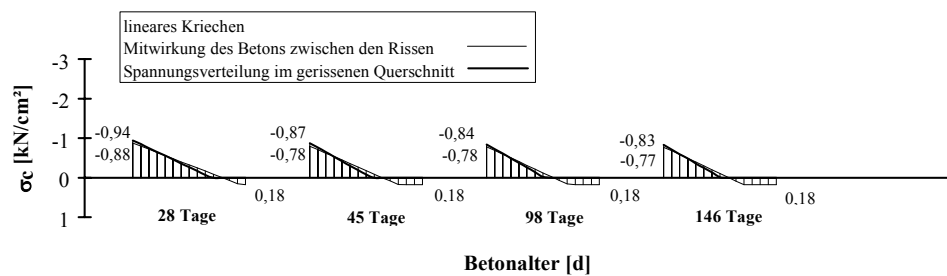
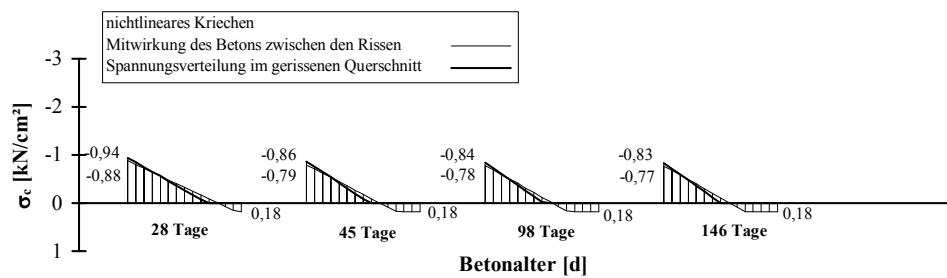
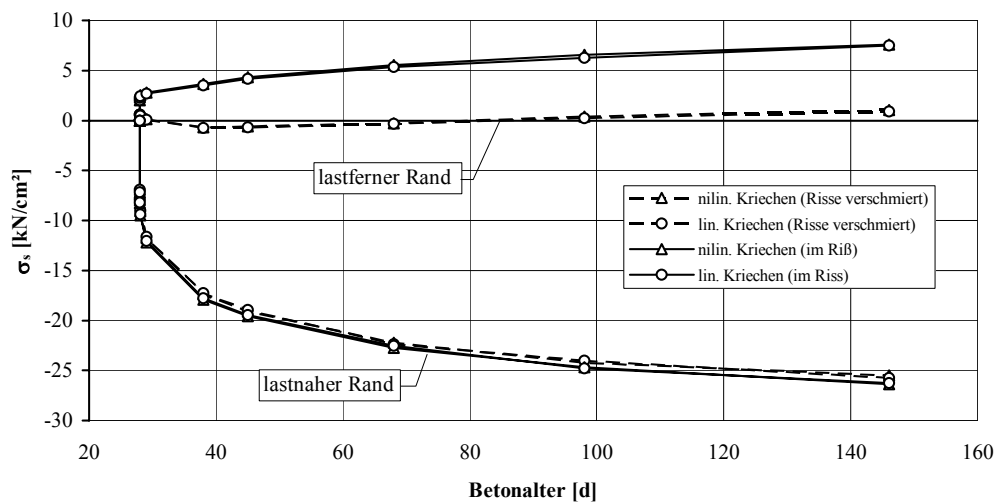
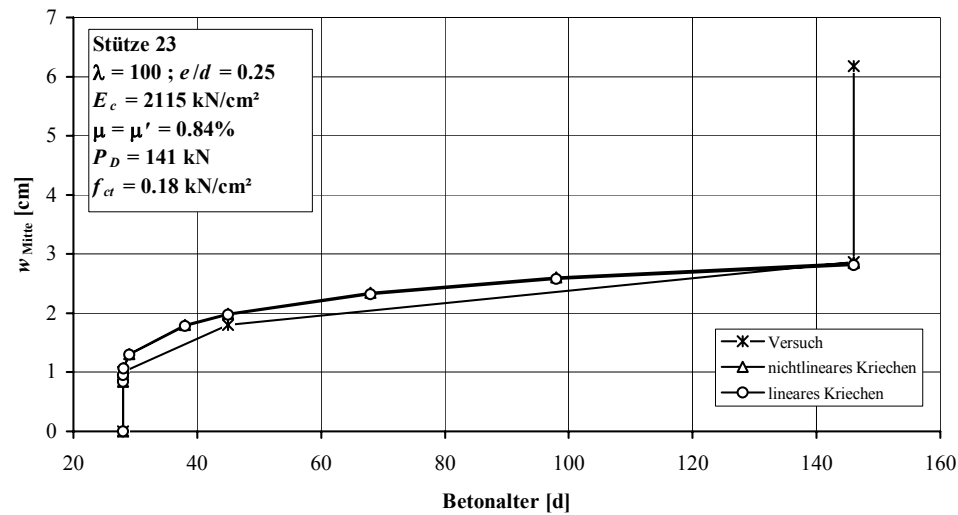
Die Versuchsstützen 65 und 66 weisen mit $\lambda=150$ die größten Schlankheiten auf. Dementsprechend ergeben sich große Unterschiede in den Berechnungsergebnissen bei relativ geringen Veränderungen der Ausgangswerte. Der Grund dafür ist in dem wesentlich größeren Einfluß der geometrischen Nichtlinearität zu suchen, der mit jeder zusätzlichen Ausmitte weiter verstärkt wird.

Bei Versuchsstütze 65 erfolgte der Lasteintrag mit einer nur sehr kleinen Exzentrizität. Diese Stütze versagt rechnerisch noch innerhalb der ersten 24 Stunden nach Aufbringen der Belastung. Die großen Abweichungen der berechneten Endauslenkungen von den gemessenen Auslenkungen kommt dadurch zustande, daß die letzte Messung nach Eintreten des Bruches, also bei Vorhandensein eines instabilen Zustandes, erfolgte. Dem kann kein rechnerischer Wert gegenübergestellt werden, da die Auslenkungen bei Auftreten eines instabilen Zustandes keinen endlichen Wert besitzen.

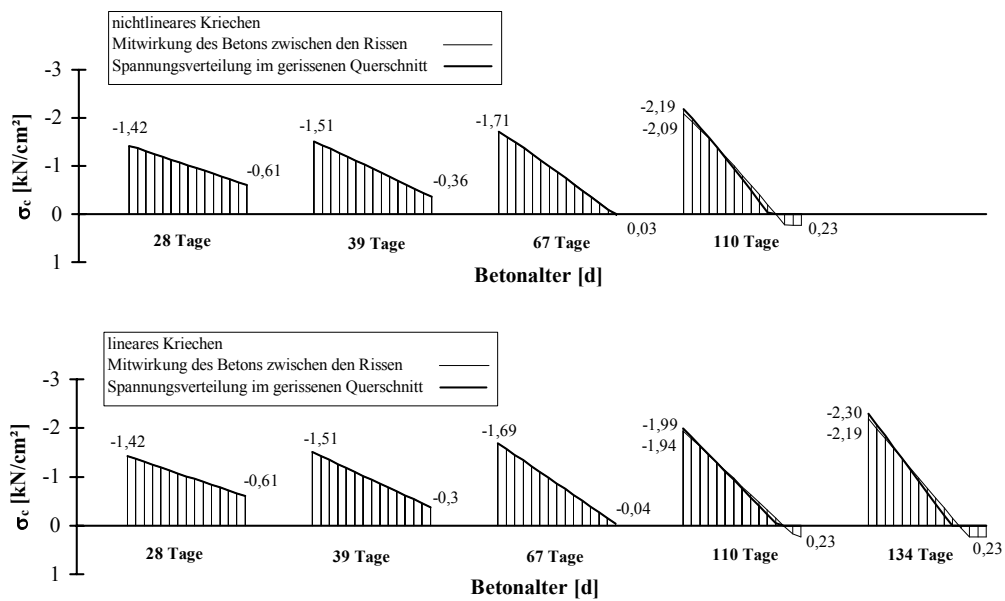
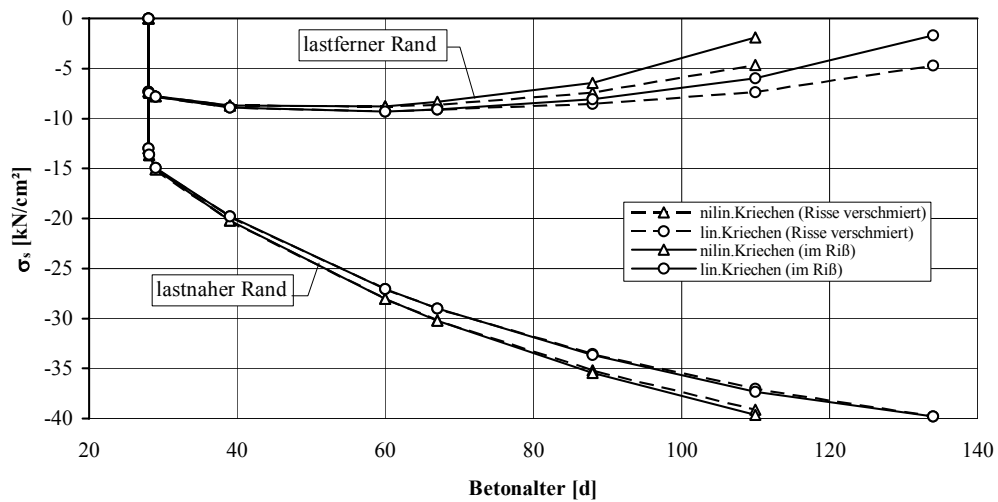
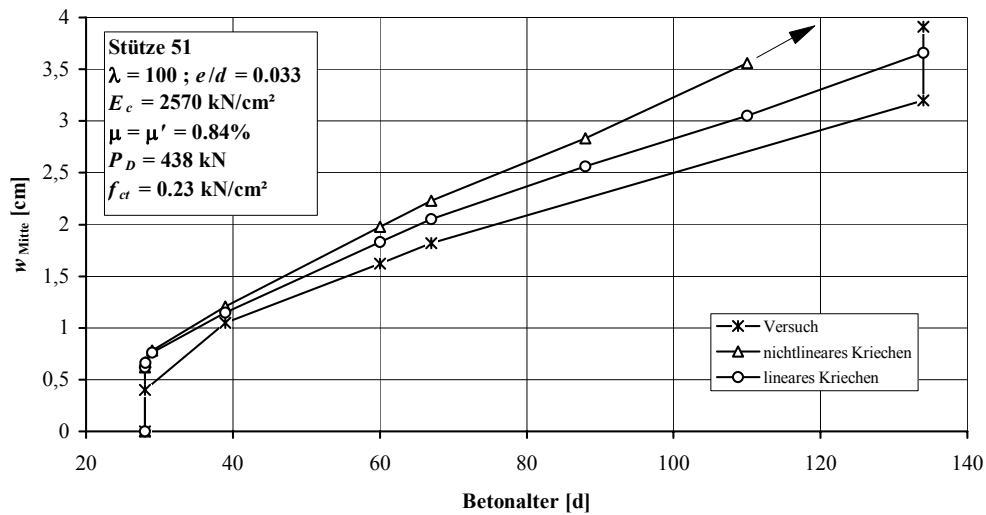
In den nachfolgenden Tafeln 6.2.3-1..6 sind die berechneten Auslenkungen den Versuchsergebnissen gegenübergestellt. Zusätzlich ist jeweils die errechnete Spannungsentwicklung in der Bewehrung und im Beton für den Fall des linearen und des nichtlinearen Kriechens dargestellt. Weiterhin werden die Unterschiede zwischen der Spannungsentwicklung bei „Verschmieren“ der Risse und bei Betrachtung des gerissenen Querschnitts verdeutlicht.



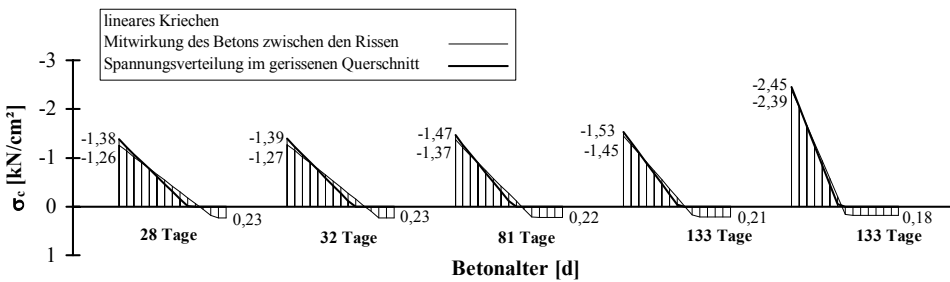
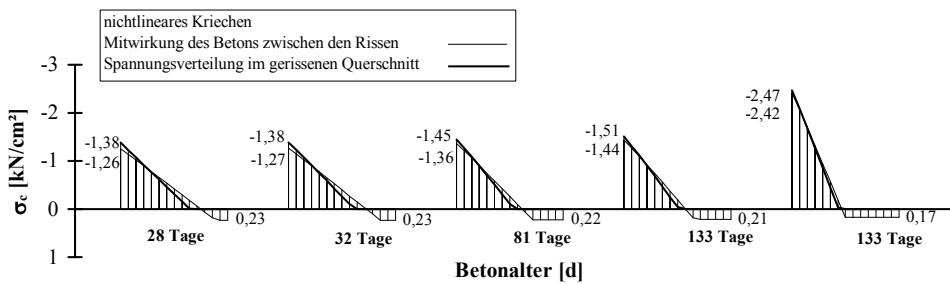
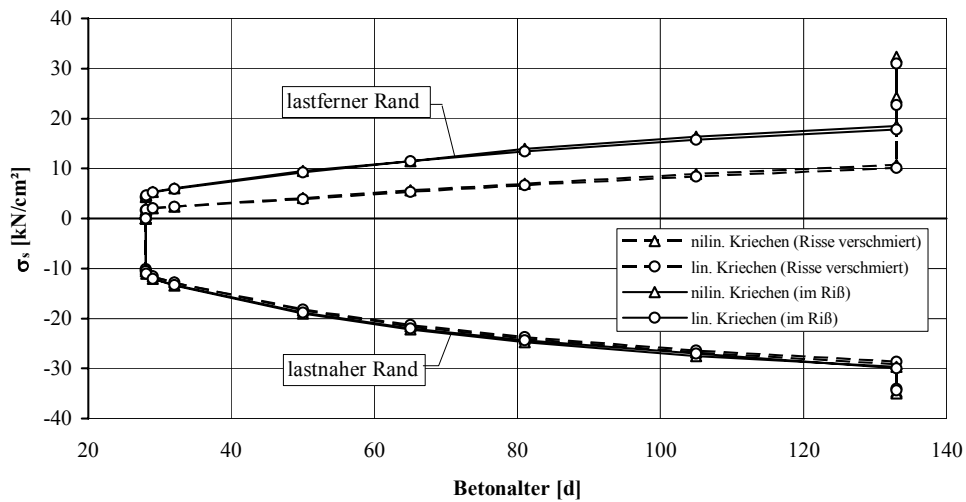
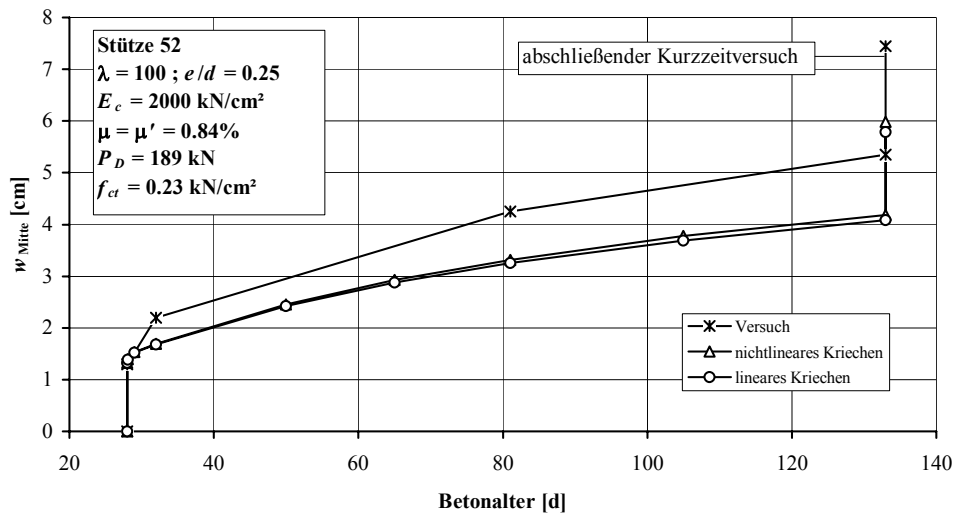
Tafel 6.2.3-1: Vergleich der gemessenen und berechneten Auslenkung in Stützenmitte (Stütze 13), sowie rechnerische Spannungsentwicklung in Bewehrung und Beton



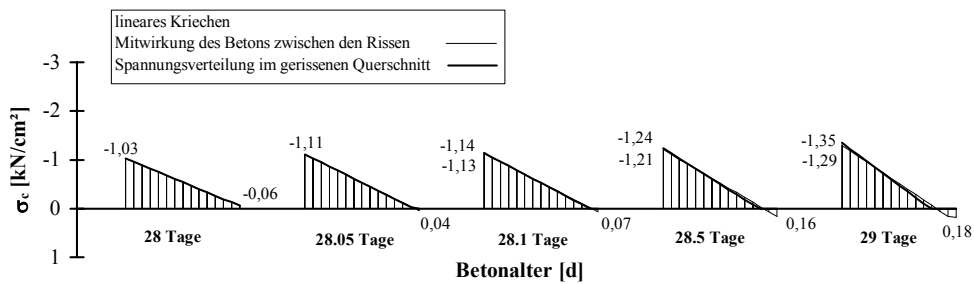
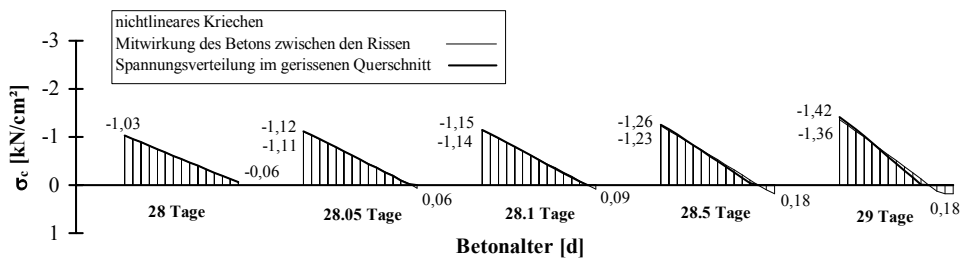
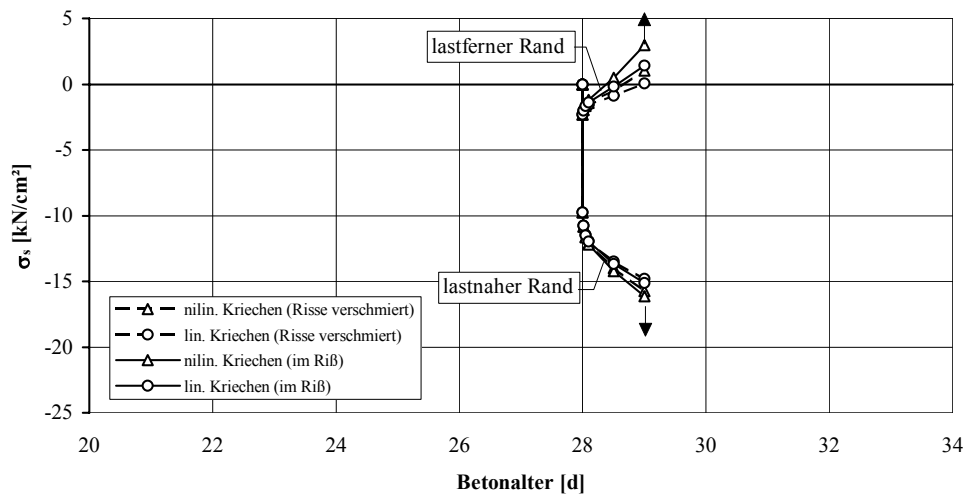
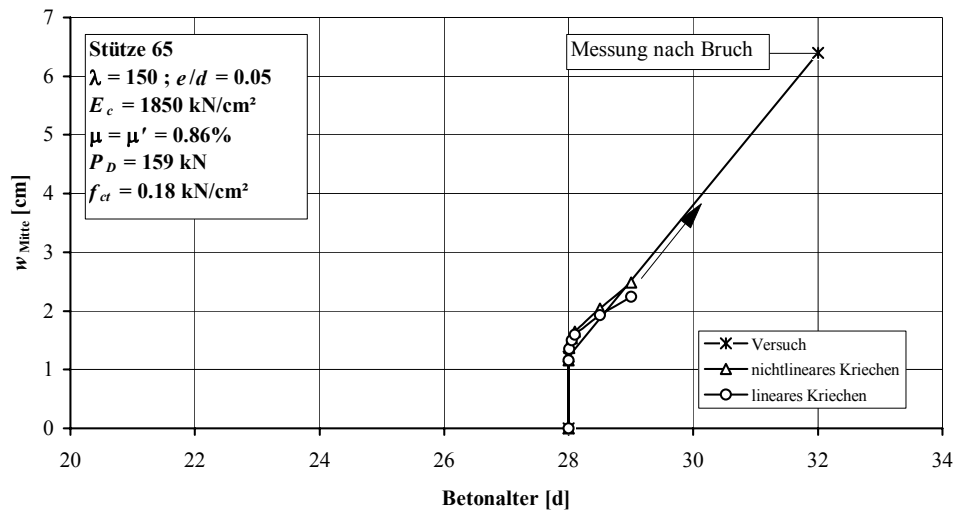
Tafel 6.2.3-2: Vergleich der gemessenen und berechneten Auslenkung in Stützenmitte (Stütze 23), sowie rechnerische Spannungsentwicklung in Bewehrung und Beton



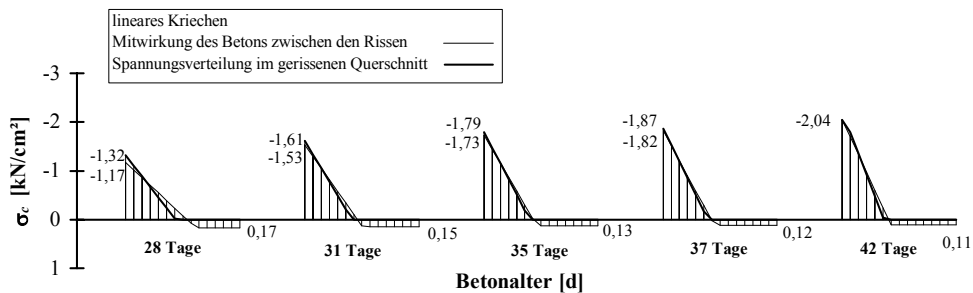
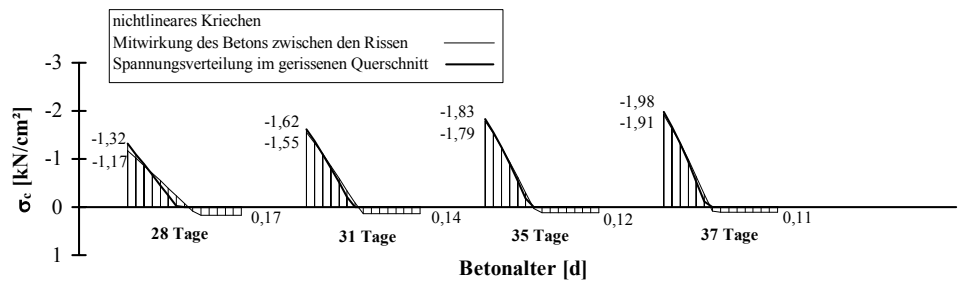
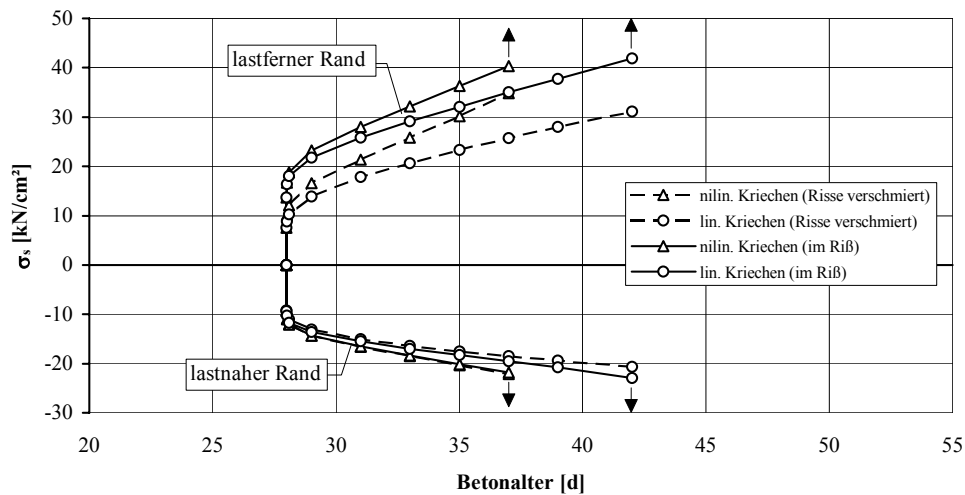
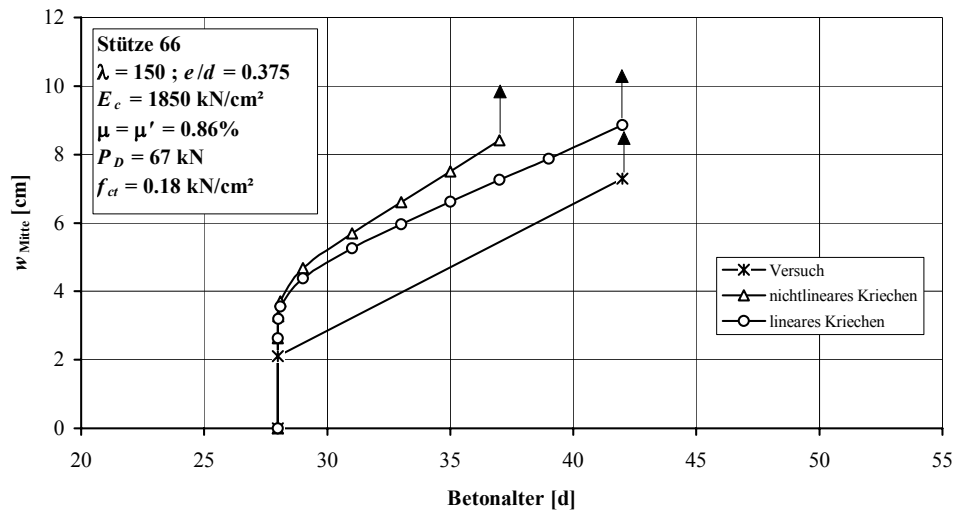
Tafel 6.2.3-3: Vergleich der gemessenen und berechneten Auslenkung in Stützenmitte (Stütze 51), sowie rechnerische Spannungsentwicklung in Bewehrung und Beton



Tafel 6.2.3-4: Vergleich der gemessenen und berechneten Auslenkung in Stützenmitte (Stütze 52), sowie rechnerische Spannungsentwicklung in Bewehrung und Beton



Tafel 6.2.3-5: Vergleich der gemessenen und berechneten Auslenkung in Stützenmitte (Stütze 65), sowie rechnerische Spannungsentwicklung in Bewehrung und Beton



Tafel 6.2.3-6: Vergleich der gemessenen und berechneten Auslenkung in Stützenmitte (Stütze 66), sowie rechnerische Spannungsentwicklung in Bewehrung und Beton

6.2.4 Parameterstudie

Wie bereits in Abschnitt 6.2.1 angedeutet, ergeben sich bei den Vergleichsrechnungen zum Teil erhebliche Unterschiede, wenn die Eingangsparameter geringfügig korrigiert werden. In diesem Abschnitt sollen die Einflüsse der einzelnen Materialkenngrößen anhand einer Parameterstudie verdeutlicht werden, um eine Einordnung der Berechnungsergebnisse vornehmen zu können. Für die Parameterstudie wird die Versuchsstütze 13 ausgewählt. Gegenüber den in Abschnitt 6.2.2 angegebenen Materialkenngrößen werden folgende Eingangswerte variiert:

1. rechnerische Betonzugfestigkeit,
2. Betonelastizitätsmodul,
3. Schwindmaße,
4. Bezugsfestigkeit für das nichtlineare Kriechen,
5. Kriechzahlerhöhungsfaktor.

Die mit den variierten Parametern berechneten Kurven sind jeweils der gemessenen und der in Abschnitt 6.2.3 berechneten Kurve gegenübergestellt. Bei der Berechnung mit den veränderten Parametern ergeben sich mehr oder weniger große Abweichungen gegenüber den Ausgangskurven.

Dabei ist zu beachten, daß die in den Parameterstudien 1. bis 3. aufgetretenen Tendenzen prinzipiell auf jede in Abschnitt 6.2.3 untersuchte Stütze übertragbar sind. Im Unterschied dazu lassen sich aus den Parameterstudien 4 und 5 keine allgemeingültigen Schlußfolgerungen bezüglich der qualitativen und quantitativen Ergebnisunterschiede bei Berücksichtigung der verschiedenen Kriechzahlerhöhungsfaktoren ziehen.

In Abb. 6.2.4-1 ist der Einfluß der rechnerischen Betonzugfestigkeit auf die zeitliche Entwicklung der Stützensauslenkung in Feldmitte dargestellt. Über die in Abhängigkeit von der aktuellen Stahldehnung abgeminderte rechnerische Betonzugfestigkeit wird die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen in der Zugzone erfaßt. Bei den Untersuchungen in Abschnitt 6.2.3 wird der erste Riß der Zugspannung zugeordnet, die dem 5%-Quantil der zentrischen Zugfestigkeit, in diesem Fall 0.19 kN/cm^2 , entspricht. Das 5%-Quantil der zentrischen Zugfestigkeit wird dabei über die Näherungsbeziehung Gl.(2.2.2-3) aus der Betondruckfestigkeit bestimmt.

Aus Abb. 6.2.4-1 ist ersichtlich, daß schon geringfügige Abweichungen von dieser Annahme zu deutlichen Unterschieden in den Berechnungsergebnissen führen. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Abweichungen ist relativ groß, wenn man bedenkt, daß die Zugfestigkeit des Betons eine in weiten Grenzen streuende Größe ist, deren Ermittlung aus der Betondruckfestigkeit lediglich eine näherungsweise Abschätzung darstellt. Weitere Unsicherheiten ergeben sich aus dem „Verschmieren“ der Risse über die Intervalllänge. Aufgrund der zufälligen Verteilung der Zugfestigkeit über die Elementlänge kann von vornherein keine Aussage über Ort und Zeitpunkt des Auftretens des nächsten Risses getroffen werden, so daß die Steifigkeit einzelner Bereiche wesentlich geringer bzw. größer sein kann, als in der Berechnung angenommen.

Für die vergleichenden Betrachtungen wird die 5%-Quantil-Zugfestigkeit zunächst nach unten bzw. oben korrigiert. Die Annahme, daß die rechnerische Zugfestigkeit etwa bei der Hälfte des unteren 5%-Quantils (0.09 kN/cm^2) liegt, führt in diesem speziellen Fall zu einer besseren

Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Entsprechend ergibt sich ein größerer Abstand bei der Berechnung mit der mittleren rechnerischen Zugfestigkeit (0.27 kN/cm^2).

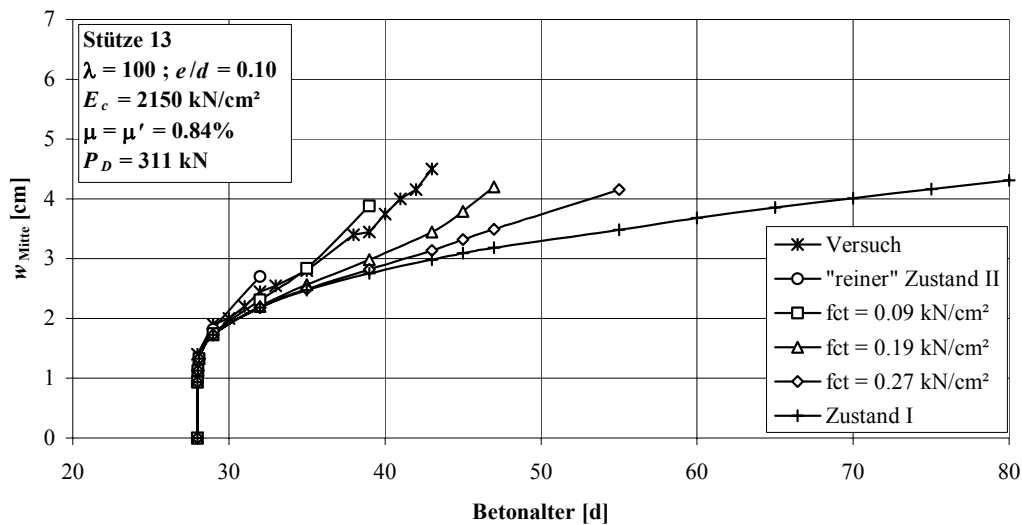


Abb. 6.2.4-1: Einfluß der angenommenen Betonzugfestigkeit auf die Berechnungsergebnisse

Weiterhin werden die berechneten Ergebnisse für die beiden Extremfälle, keine Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen („reiner“ Zustand II) und keine Berücksichtigung der Rißbildung (Zustand I), angegeben. Es ist zu erkennen, daß die Berechnung unter Voraussetzung dieser beiden vereinfachenden Annahmen zu einer erheblichen Über- bzw. Unterschätzung der Auslenkungen führt. Aus den dargestellten Vergleichsrechnungen kann abgeleitet werden, daß die Erfassung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen einen erheblichen Einfluß auf die Berechnungsergebnisse hat. In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, daß mit größer werdender Betonzugzone deutlichere Unterschiede in den Berechnungsergebnissen zu erwarten sind.

Einen ähnlich großen Einfluß auf die Berechnungsergebnisse hat der angenommene Betonelastizitätsmodul. Für die Vergleichsrechnungen in Abschnitt 6.2.3 wird der Elastizitätsmodul näherungsweise aus den sofort eintretenden Deformationen, die in parallel laufenden Kriechversuchen gemessen wurden, bestimmt. Im Fall der Stütze 13 ergibt sich daraus ein E-Modul von 2150 kN/cm^2 . Diese Vorgehensweise stellt insofern eine Näherung dar, als in den gemessenen Anfangsdehnungen bereits ein Teil der Kriechdeformationen enthalten sein kann. Dieser Fehler kann zu einer deutlichen Unterschätzung des Elastizitätsmoduls führen. Weiterhin ist zu berücksichtigen, daß bei der experimentellen Bestimmung des E-Moduls, auch bei identischen Prüfverhältnissen, erhebliche Abweichungen auftreten können.

Um einen Anhaltspunkt darüber zu erhalten, in welcher Größenordnung sich diese Unsicherheiten auf die berechneten Auslenkungen auswirken, sind in Abb.6.2.4-2 die ermittelten Kurvenverläufe für verschiedene Betonelastizitätsmoduli angegeben. Die Variation erfolgt dabei über den in MC90 angegebenen Faktor α_E , durch den der Einfluß verschiedener Zuschlagstoffarten erfaßt wird. Dieser Faktor liegt zwischen 0.7 (für Sandstein) und 1.2 (für Basalt und dichten Kalkstein), so daß damit ein Schwankungsbereich von etwa 50% abgedeckt wird.

Wie aus Abb.6.2.4-2 ersichtlich, führt die Variation des E-Moduls zu unterschiedlichen Verläufen der Belastungsdauer-Auslenkungs-Kurve. Während bei der Berechnung mit einem

E-Modul von 1505 kN/cm^2 der zeitliche Auslenkungszuwachs bis zum Versagen praktisch konstant ist (Kurventyp 1, siehe Abschnitt 6.2.3), ist bei den übrigen Berechnungen zunächst ein kleiner werdender Anstieg der Belastungsdauer-Auslenkungs-Kurven zu verzeichnen, wobei die Annahme eines E-Moduls von 2580 kN/cm^2 zu einem vergleichsweise späten Versagen der Stütze führt (im Diagramm nicht mehr dargestellt). Schon eine 10%-ige Verringerung des E-Moduls gegenüber der Versuchsnachrechnung in Abschnitt 6.2.3 führt zu einer erheblichen Überschätzung der Auslenkungen und damit zu einem vorzeitigen Versagen der Stütze.

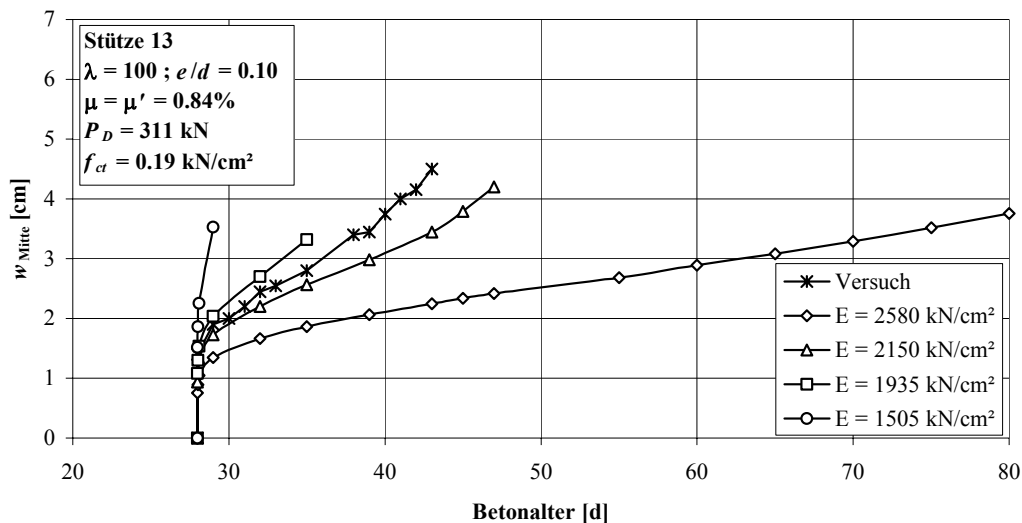


Abb. 6.2.4-2: Einfluß des Betonelastizitätsmoduls auf die Berechnungsergebnisse

Eine weitere Unsicherheit bei der Versuchsnachrechnung ergibt sich aus der Annahme der Schwinddehnungen, da die parallel zu den Stützenversuchen durchgeführten Schwindversuche nicht dokumentiert sind. Bei der experimentellen Bestimmung der Kriechzahlen wurden die gemessenen Schwinddehnungen allerdings aus den in den Kriechversuchen ermittelten Gesamtdehnungen eliminiert, um die Kriechzahlen nicht zu verfälschen. Deshalb werden die Schwinddehnungen bei der rechnerischen Analyse in Abschnitt 6.2.3 ebenfalls berücksichtigt. Dabei werden sie durch eines der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Vorhersageverfahren in Abhängigkeit der vorhandenen Materialkenngrößen und der Umweltbedingungen abgeschätzt.

Grundlage für die Ermittlung der Schwindmaße bei Versuchsstütze 13 ist das Vorhersageverfahren nach EC2 (siehe auch Abschnitt 6.2.2).

In Abb.6.2.4-3 ist der Einfluß der Schwinddehnungen auf die Berechnungsergebnisse dargestellt. Es ist ersichtlich, daß durch die Schwinddehnungen des Betons zusätzliche Auslenkungen erzeugt werden. Dieser Effekt ist in dem Steifigkeitsabfall begründet, der durch querschnittsinterne Spannungsumlagerungen hervorgerufen wird. In deren Folge bauen sich im Stahl Druckspannungen und im Beton Zugspannungen auf, die bei Erreichen des Spannungsgrenzwerts zu einer Vergrößerung der gerissenen Bereiche bzw. zu zusätzlichen Rissen führen.

In Anbetracht dessen, daß die Schwindmaße in der Parameterstudie um jeweils 100% variiert werden, läßt sich aus der Vergleichsbetrachtung ableiten, daß sich eine Veränderung der Schwinddehnungen in geringerem Maße auf die Berechnungsergebnisse auswirkt als eine prozentual gleichwertige Veränderung der Betonzugfestigkeit oder des Betonelastizitätsmoduls.

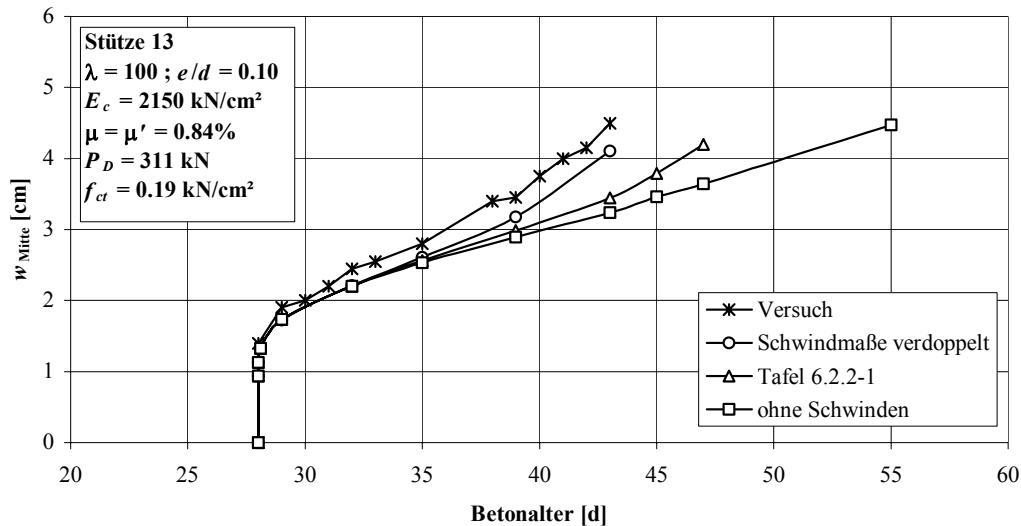


Abb.6.2.4-3: Einfluß des Schwindens auf die Berechnungsergebnisse

Die beiden letzten Parameterstudien beziehen sich auf die Beschreibung des nichtlinearen Betonkriechens. Dabei wird zunächst der Einfluß der Bezugsfestigkeit untersucht. In der Versuchsnachrechnung wird analog zu *Grasser/Kraemer* [6.12] von einer Bezugsfestigkeit ausgegangen, die der Prismendruckfestigkeit bei einer Belastungsdauer von 20 Minuten entspricht. Bei einer Variation dieser Festigkeit um ca. 10% ergeben sich die in Abb. 6.2.4-4 dargestellten Ergebnisabweichungen. Diese Abweichungen liegen etwa im Bereich der Unterschiede, die sich aus den vergleichenden Betrachtungen mit verschiedenen Kriechzahlerhöhungsfaktoren ergeben. Während die Berechnung auf Grundlage der Erhöhungsfaktoren nach *Grasser/Kraemer*, *EC2* und *Bazant/Kim* keine nennenswerten Unterschiede liefert, liegen die berechneten Auslenkungen bei Anwendung des Überproportionalitätsfaktors nach *Bazant/Prasannan* deutlich näher an den gemessenen Auslenkungen. Diese Tendenz ist allerdings nicht allgemeingültig. Bei weiteren Beispielen ist eine Verschiebung der in Abb.6.2.4-5 dargestellten Verhältnisse wahrscheinlich. Das hängt einerseits vom Spannungsniveau der einzelnen Schichten, sowie von der Größe der nichtlinear kriechenden Bereiche ab.

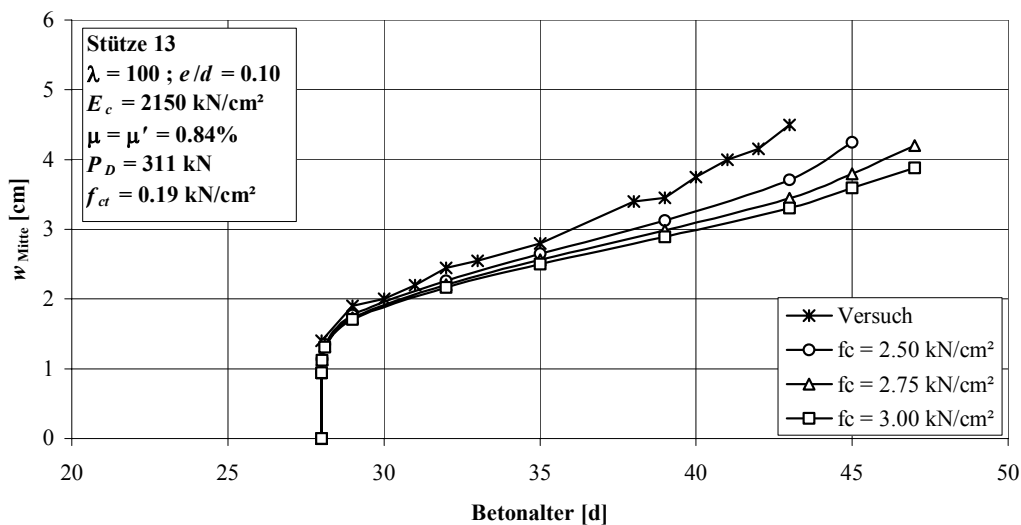


Abb.6.2.4-4: Einfluß der Bezugsfestigkeit für das nichtlineare Kriechen auf die Berechnungsergebnisse

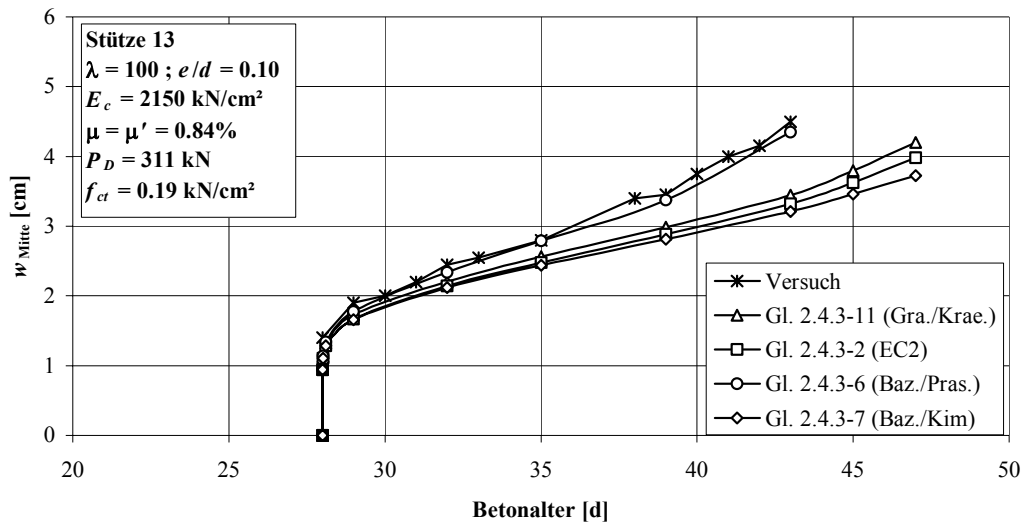


Abb.6.2.4-5: Einfluß des Kriechzählerhöhungsfaktors auf die Berechnungsergebnisse

Zusätzlich zu den Ergebnisabweichungen, die aus den Unsicherheiten bei der Annahme der notwendigen Materialeigenschaften resultieren, können Ungenauigkeiten durch zu grobe Diskretisierung des Zeitraums bzw. der Tragwerksgeometrie entstehen. Der Einfluß der zeitlichen Intervallteilung wurde bereits in Abschnitt 4.4 untersucht. Aufgrund der dort gewonnenen Ergebnisse und der bei der Versuchsnachrechnung vorliegenden Intervallteilung kann davon ausgegangen werden, daß sich durch eine engere Anordnung von Intervallpunkten keine nennenswerte Veränderung der Berechnungsergebnisse erzielen läßt. Lediglich der Versagenszeitpunkt ließe sich exakter ermitteln, wenn ab dem Zeitpunkt, zu dem die Belastungsdauer-Auslenkungskurve einen Wendepunkt aufweist, zusätzliche Intervallschritte eingefügt würden. Aus Sicht des Verfassers ist jedoch die Kenntnis des exakten rechnerischen Versagenszeitpunktes weniger wesentlich, so daß hier auf eine weitergehende Untersuchung verzichtet wird.

Im Vordergrund des Interesses steht daher der Einfluß der Querschnittsdiskretisierung und der Anzahl der diskreten Stützstellen über die Stablänge. Bei den Versuchsnachrechnungen im Abschnitt 6.2.3 werden die Querschnitte in jeweils 15 Schichten gleicher Dicke zerlegt, die Stützen werden in ihrer Längsachse durch 13 Diskretisierungspunkte, die über die Stützhöhe gleichmäßig verteilt sind, beschrieben. Die Auswirkungen einer feineren bzw. größeren Diskretisierung auf die Berechnungsergebnisse sind in den Abbildungen 6.2.4-6 und 6.2.4-7 dargestellt. Zur Orientierung werden in den Diagrammen die gemessenen Auslenkungen angegeben, die allerdings nicht die Bezugswerte für die Einschätzung der Berechnungsergebnisse darstellen. Da eine feinere Diskretisierung im Rahmen der getroffenen Annahmen genauere Ergebnisse nach sich ziehen muß, ist die Kurve als Vergleichskurve zugrunde zu legen, die sich unter Voraussetzung der feinsten Unterteilung ergibt. Der Abbruch der Untersuchungen erfolgt jeweils, wenn durch zwei aufeinanderfolgende Berechnungen mit verschiedenen Diskretisierungen keine nennenswerten Ergebnisunterschiede mehr erzielt werden.

Die Vergleichsrechnungen ergeben, daß sich die Ergebnisse bei feiner werdender Diskretisierung von oben an einen Endwert annähern, d.h. aus einer größeren Diskretisierung folgen größere Verformungen. Der Grund dafür ist in den intervallweise konstanten Schnittgrößen bzw. Spannungen zu suchen. Aus einer Vergrößerung der Intervalle resultiert die Beanspruchung eines größeren Tragwerksbereiches durch die extremalen Schnittgrößen.

Aufgrund des Steifigkeitsabfalls in Abhängigkeit der vorhandenen Beanspruchung ist bei größeren Intervallabständen ein größerer Bereich des Tragelements von dem Steifigkeitsabfall infolge der extremalen Beanspruchung betroffen, so daß das Gesamttragwerk zu weich approximiert wird.

Aus den Diagrammen geht weiterhin hervor, daß die bei der Versuchsnachrechnung verwendete Diskretisierungsgenauigkeit ausreichend ist, so daß die Abweichungen von den Versuchskurven nicht auf die näherungsweise Beschreibung des Tragelements zurückzuführen sind. Die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers ist vor allem im Zusammenhang mit der Minimierung des Berechnungsaufwandes von Bedeutung, da jede Verfeinerung der Diskretisierung zu wachsenden Rechenzeiten führt. Bei der praktischen Berechnung muß demzufolge ein Kompromiß zwischen geforderter Ergebnisgenauigkeit und annehmbarer Rechenzeit in Kauf genommen werden.

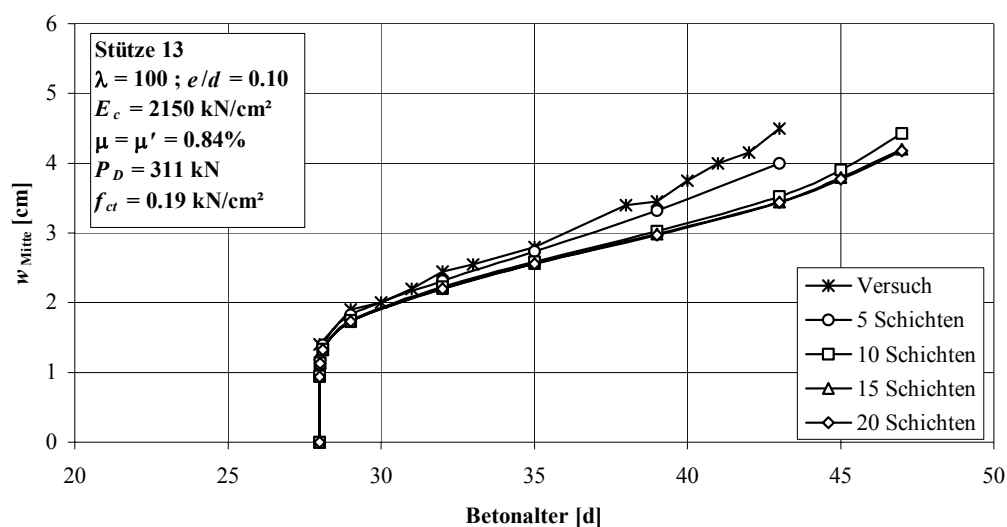


Abb.6.2.4-6: Einfluß der Schichtenanzahl auf die Berechnungsergebnisse

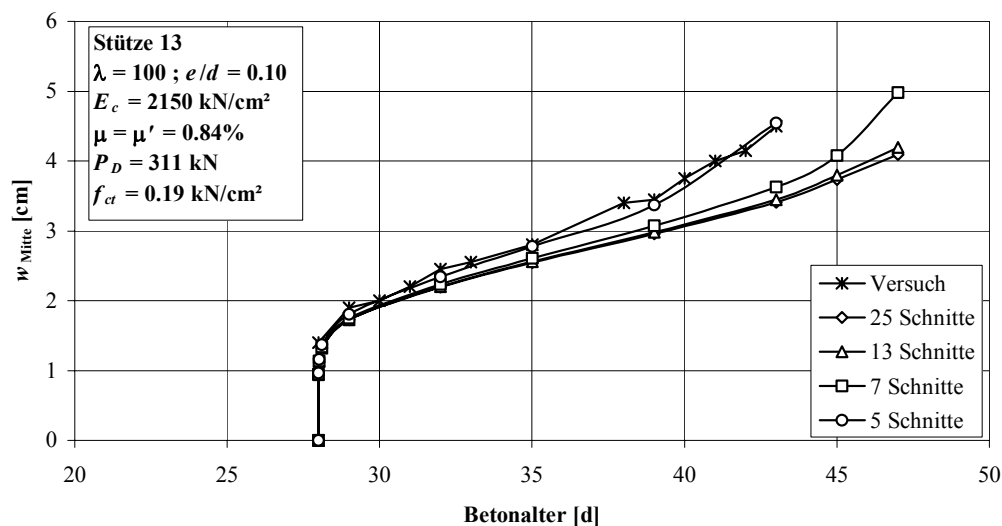


Abb.6.2.4-7: Einfluß der Anzahl der diskreten Schnitte auf die Berechnungsergebnisse

7 Ausgewählte numerische Untersuchungen

7.1 Einleitung

In dem nachfolgenden Kapitel werden die Ergebnisse einiger ausgewählter numerischer Untersuchungen vorgestellt, die im Rahmen der Arbeit mit Hilfe des selbst entwickelten und in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Berechnungsverfahrens durchgeführt werden. Die Untersuchungen lassen sich dabei den Problemkreisen zuordnen, bei denen das Tragverhalten durch die zeitabhängigen Betonverformungen ungünstig beeinflusst wird. Das betrifft unter anderem die Ermittlung der Spannungsumlagerungen zwischen Beton und Bewehrung in vorgespannten Querschnitten und den Grenzzustand der Tragfähigkeit infolge Tragwerksverformungen (Knicksicherheitsnachweis). Der Hauptgegenstand der Untersuchungen bezieht sich auf folgende Problemkreise:

- 1) Einfluß des nichtlinearen Kriechens im Vergleich zum linearen Kriechen auf die querschnittsinternen Spannungsumlagerungen in vorgespannten Querschnitten,
- 2) Einfluß des nichtlinearen Kriechens auf die Langzeitstabilität schlanker Stahlbetonstützen.

7.2 Spannungsumlagerungen in einem teilweise vorgespannten Querschnitt

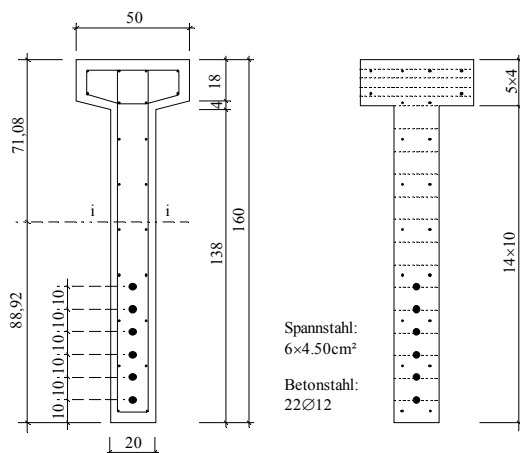
Die Untersuchungen zu den Spannungsumlagerungen zwischen Beton und Bewehrung in gerissenen, vorgespannten Querschnitten werden anhand des in Tafel 7.2-1 abgebildeten Querschnitts eines mit sofortigem Verbund vorgespannten, statisch bestimmt gelagerten Spannbetonbinders durchgeführt. Die Annahmen zu den Materialkenngrößen, den Umweltbedingungen, zum Kriechen und Schwinden des Betons sowie zur Relaxation des Spannstahls können ebenfalls Tafel 7.2-1 entnommen werden.

Bei Tragstrukturen mit statisch bestimmter Lagerung wird die Schnittgrößenverteilung infolge des zeitabhängigen Betonverhaltens nicht verändert, so daß die Schnittgrößen bei gleichbleibender äußerer Belastung über den Zeitraum konstant sind. Die Schnittgrößen können demzufolge für jeden Betrachtungszeitpunkt als bekannt vorausgesetzt werden und gehen als Belastungsgröße in das Problem ein.

Das für die Untersuchungen gewählte zeitliche Belastungsregime ist durch zwei Abschnitte gekennzeichnet. Im ersten Belastungsabschnitt ist der Querschnitt lediglich durch das Moment infolge Eigengewicht des Trägers und durch die Vorspannkraft beansprucht. Bei einem Betonalter von 28 Tagen wird zusätzlich die volle Dauerlast aufgebracht, die der Binder theoretisch unendlich lange zu tragen hat.

Untersuchungen zum Einfluß des nichtlinearen Kriechens sind nur dann sinnvoll, wenn verhältnismäßig große Betonspannungen auftreten. Aus diesem Grund wird das Dauerlastmoment in diesem Beispiel sehr hoch angesetzt. Der zusätzlich geführte Nachweis des Grenzzustandes der Tragfähigkeit ergibt für den Querschnitt ein aufnehmbares Moment M_u von ca. 3590 kNm. Dabei wird der Beton mit $\gamma_c = 1.5$ und der Stahl mit $\gamma_s = 1.15$ gemäß EC2 abgesichert. Die für ständig wirkende Lasten erforderliche 1.35-fache Sicherheit gegen Versagen (EC2) ist damit für das Belastungsregime 1 (Tafel 7.2-1) gegeben ($M_{sd} = 1.35 \times 2628 = 3548 \text{ kNm} < 3590 \text{ kNm} = M_u$). Für Lastregime 2 ist dagegen nur eine 1.17-fache Sicherheit vorhanden.

Querschnitt und Schichtenmodell:



Materialkenngrößen:

Beton:

normal erhärtender Zement

$f_{ck} = 3.50 \text{ kN/cm}^2$

$E_{c,28} = 3200 \text{ kN/cm}^2$

$E_{c,\infty} = 3771 \text{ kN/cm}^2$

Betonstahl:

$f_s = 50 \text{ kN/cm}^2$

$E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$

Spannstahllitzen:

niedrige Relaxationsverluste

$f_z = 150 \text{ kN/cm}^2$

$E_z = 20500 \text{ kN/cm}^2$

Umweltbedingungen:

$T = 20^\circ\text{C}$ (konstant)

$RH = 65\%$ (konstant)

Belastungsregime 1:

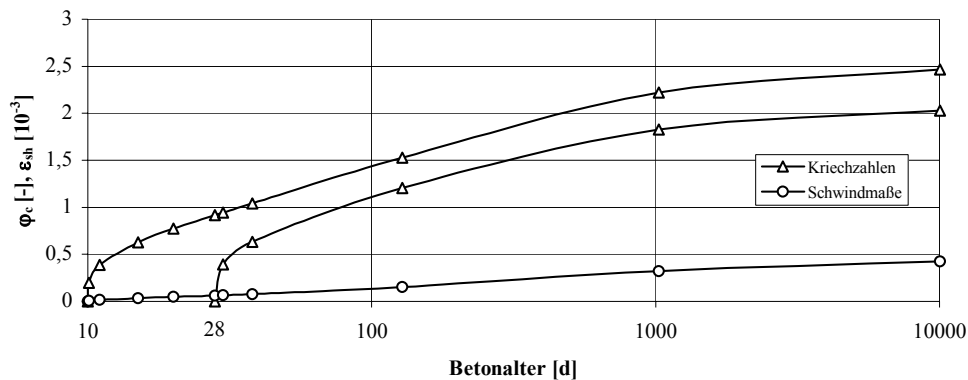
| | $\varepsilon_{(0)} [\text{‰}]$ | $M_{g1} [\text{kNm}]$ | $M_d [\text{kNm}]$ | $\Sigma M [\text{kNm}]$ |
|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------|--------------------|-------------------------|
| $t_0 = 10 \text{ d}$ | 2.38 | 684 | | 684 |
| $t_1 = 28 \text{ d}$ | 2.38 | 684 | 1944 | 2628 |
| $t_\infty \approx 30 \text{ J.}$ | 2.38 | 684 | 1944 | 2628 |

Belastungsregime 2:

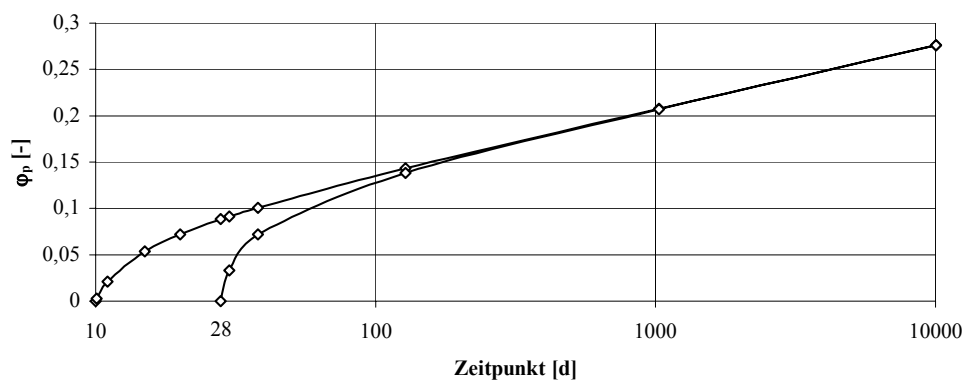
| | $\varepsilon_{(0)} [\text{‰}]$ | $M_{g1} [\text{kNm}]$ | $M_d [\text{kNm}]$ | $\Sigma M [\text{kNm}]$ |
|----------------------------------|--------------------------------|-----------------------|--------------------|-------------------------|
| $t_0 = 10 \text{ d}$ | 2.38 | 684 | | 684 |
| $t_1 = 28 \text{ d}$ | 2.38 | 684 | 2376 | 3060 |
| $t_\infty \approx 30 \text{ J.}$ | 2.38 | 684 | 2376 | 3060 |

$\varepsilon_{(0)}$ -Spannbettdehnung (jede Spannstahllage); M_{g1} -Moment infolge Eigenlast; M_d -Moment infolge zusätzlicher Dauerlast
 t_0 -Zeitpunkt des Umspannens; t_1 -Zeitpunkt des Aufbringens der Dauerlast

Kriechzahlen und Schwindmaße Beton:



Kriechzahlen Spannstahl:



Tafel 7.2-1: Eingangswerte für die Berechnung

In den Tafeln 7.2-2 bis 7.2-7 sind die berechneten zeitlichen Entwicklungen der Verformungen des Gesamtquerschnitts, der Betonspannungen sowie der Stahlspannungen in der vorgespannten und schlaffen Bewehrung dargestellt.

Zum Zeitpunkt des Umspannens, bei einem Betonalter von 10 Tagen, ist zunächst der Einfluß der Vorspannung gegenüber dem Eigengewicht des Binders bestimmend, so daß am unteren Querschnittsrand größere Betondruckspannungen als am oberen Querschnittsrand vorhanden sind. Aus dem sofort nach Belastungsbeginn einsetzenden Kriechen und Schwinden des Betons resultieren zusätzliche Querschnittsdeformationen, mit denen wegen der Annahme des starren Verbundes zwischen Bewehrung und Beton eine Abnahme der Dehnung des Spannstahls einhergeht. An die Verringerung der Dehnung ist ein Spannkraftverlust gekoppelt, der im vorliegenden Beispiel so groß ist, daß zum Zeitpunkt unmittelbar vor Aufbringen der zusätzlichen ständigen Belastung ($t = 28\text{d}$) das Trägereigengewicht ein größeres Moment als die exzentrische Vorspannung erzeugt. Der mehr gedrückte Rand liegt demzufolge an der Querschnittsoberseite.

Durch die Berücksichtigung der Relaxation des Spannstahls wird dieser Prozeß zusätzlich beschleunigt, wobei in diesem Beispiel die Ergebnisunterschiede zum Zeitpunkt $t = 28\text{d}$ aufgrund des verhältnismäßig geringen Spannungsniveaus im Spannstahl und des kurzen Beanspruchungszeitraums nicht wesentlich sind.

Mit dem Aufbringen der zusätzlichen Dauerlast wachsen die Verformungen und Spannungen im Querschnitt sprunghaft an. Unter Belastungsregime 1 beträgt der Maximalwert der Betonspannungen etwa 70% der charakteristischen Betondruckfestigkeit f_{ck} und liegt damit oberhalb des in EC2 [7.1] angegebenen Grenzwerts von $0.45f_{ck}$ für Bauteile, deren Funktion durch das Kriechen wesentlich beeinflusst wird bzw. oberhalb $0.60f_{ck}$ ($0.70f_{ck}$ bei vorgespannten Fertigteilen mit sofortigem Verbund [7.2]) zur Vermeidung von Längsrissen in Bereichen, die den Bedingungen der Umweltklassen 3 oder 4 ausgesetzt sind.

Aufgrund des großen Dauerlastmoments reißt der Querschnitt sofort nach Aufbringen der Belastung auf. Durch das Kriechen des Betons wächst die Querschnittskrümmung mit zunehmender Belastungsdauer an, infolgedessen der Spannstahl wegen seiner Lage im Querschnitt eine zusätzliche elastische Dehnung erfährt. Der Betonstahl wird je nach seiner Lage im Querschnitt gedehnt oder gestaucht. Dabei bewirkt der an die zusätzliche elastische Stahldehnungen gekoppelte Zuwachs der Stahlzugkraft, daß die Normalkraftgleichgewichtsbedingung am Querschnitt nur dann erfüllt werden kann, wenn die Summe aus Betondruckkraft und Stahldruckkraft ebenfalls zunimmt. Der Druckkraftzuwachs wird dabei vor allem durch die Erhöhung der Stahlspannungen in der Druckzone erzielt.

Wegen der Momentengleichgewichtsbedingung am Querschnitt muß die Steigerung der Zug- und Druckkräfte mit einer Abnahme des inneren Hebelarms einhergehen, was aufgrund der festgelegten Bewehrungsabstände von der Bezugsachse der Belastung nur durch ein Absinken der Wirkungslinie der Betondruckkraft möglich ist. Aus der Verlagerung der Betonspannungsfläche in Richtung der Bezugsachse der Belastung folgt eine geringer werdende Betonrandspannung und ein teilweises Schließen des Risses.

Tafel 7.2-2:

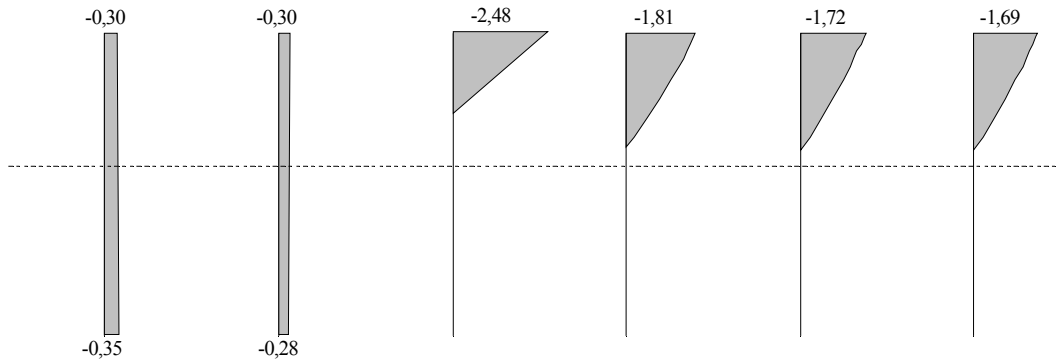
-nichtlineares Kriechen
-Zustand II
-Vernachlässigung der Spannstahlrelaxation

Belastung:

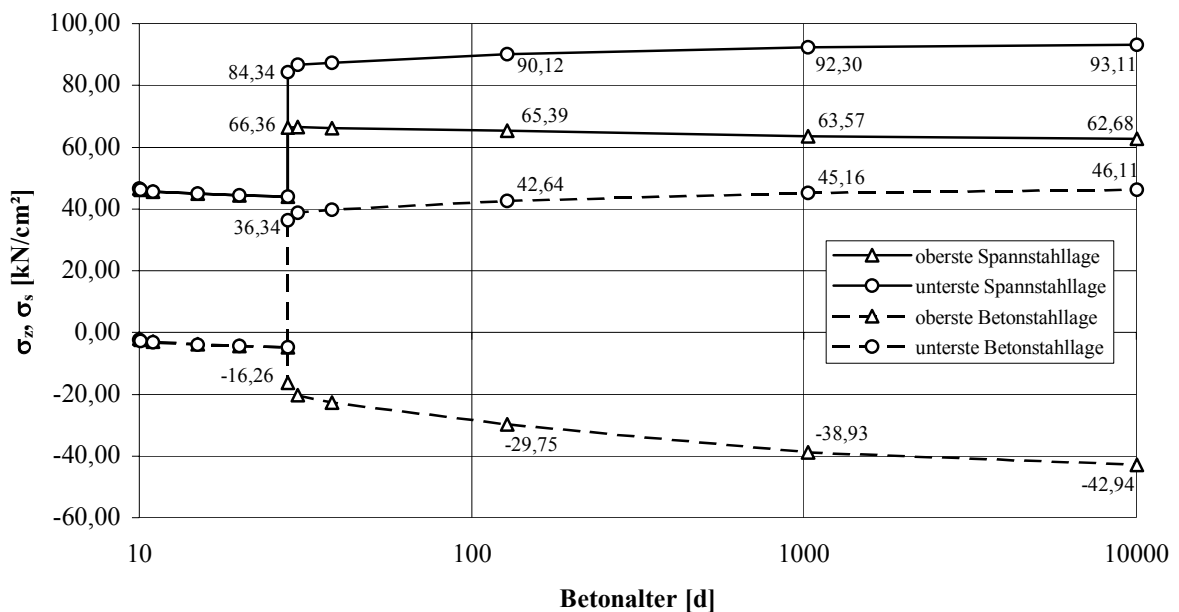
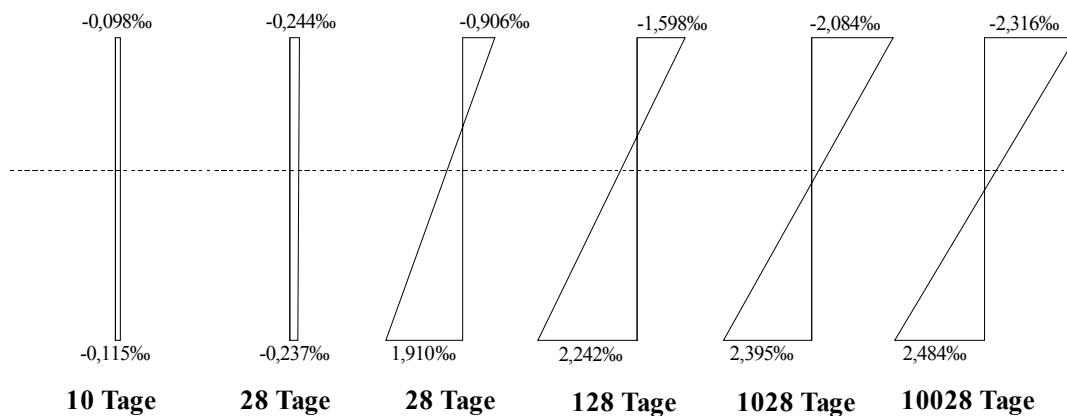
t = 10..28 Tage:
aus g_1
M = 684 kNm

t = 28..∞ Tage:
aus g_1 und g_2+p_D
M = 2628 kNm

Betonspannungen in [kN/cm²]



Dehnungen des Gesamtquerschnitts



Tafel 7.2-3:

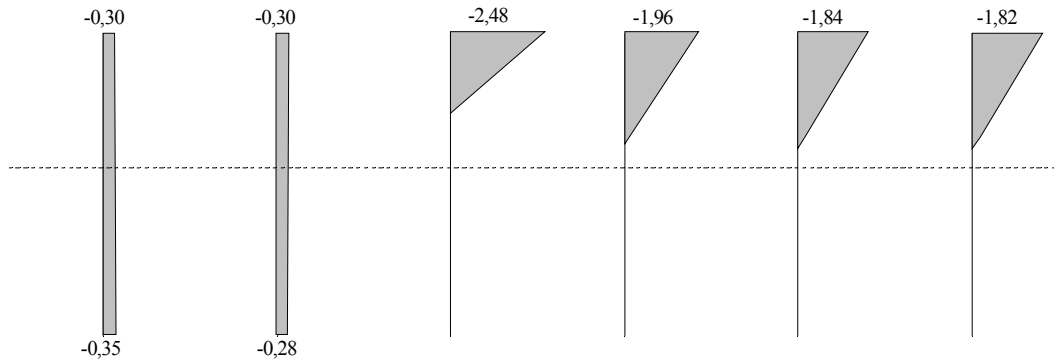
-lineares Kriechen
-Zustand II
-Vernachlässigung der Spannstahlrelaxation

Belastung:

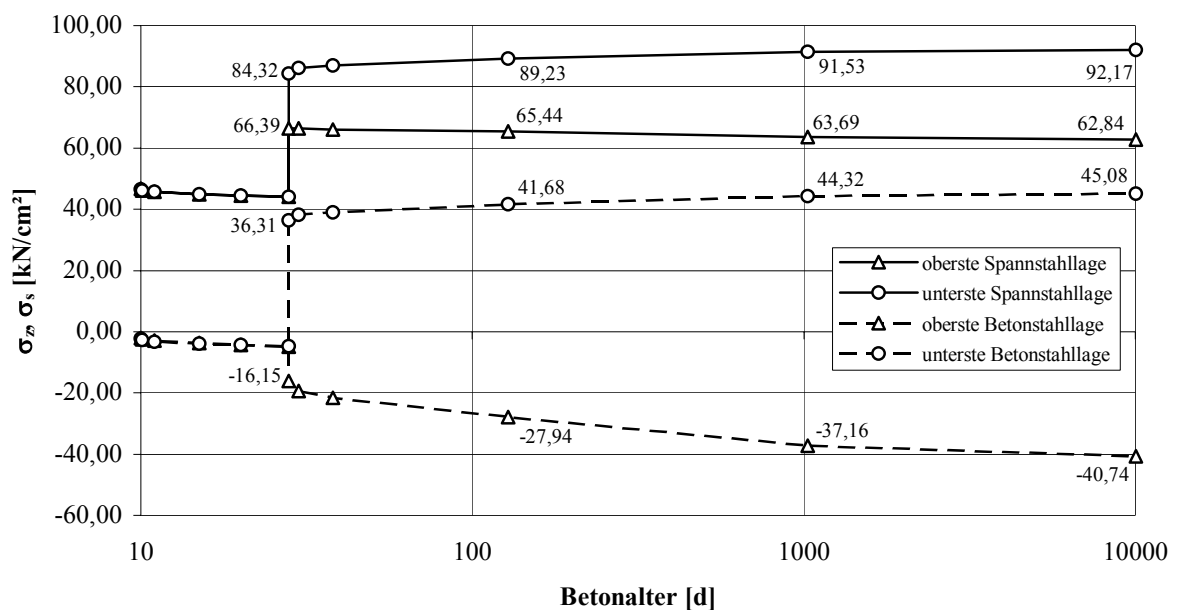
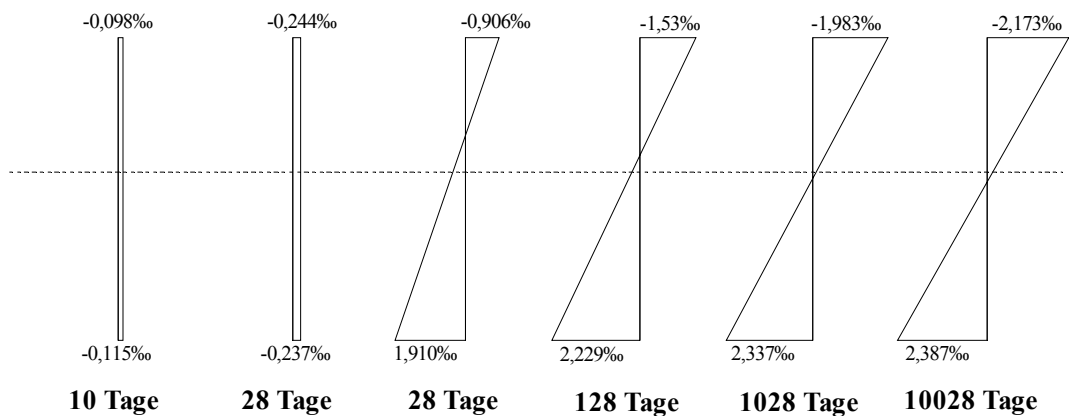
t = 10..28 Tage:
aus g_1
M = 684 kNm

t = 28..∞ Tage:
aus g_1 und g_2+p_D
M = 2628 kNm

Betonspannungen in [kN/cm²]



Dehnungen des Gesamtquerschnitts



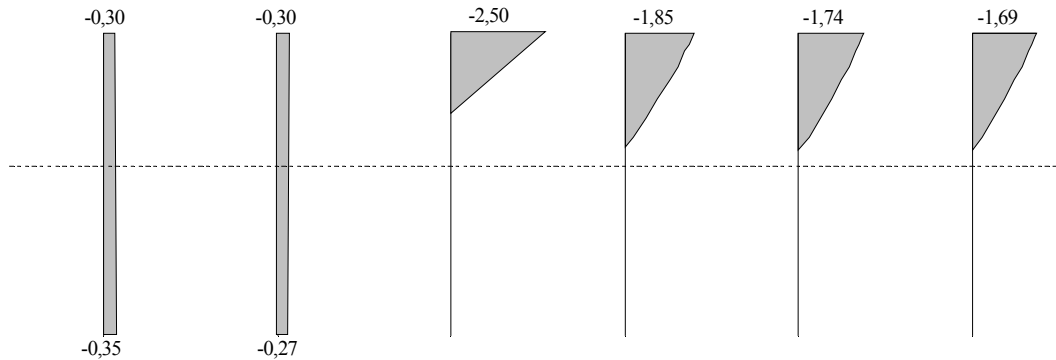
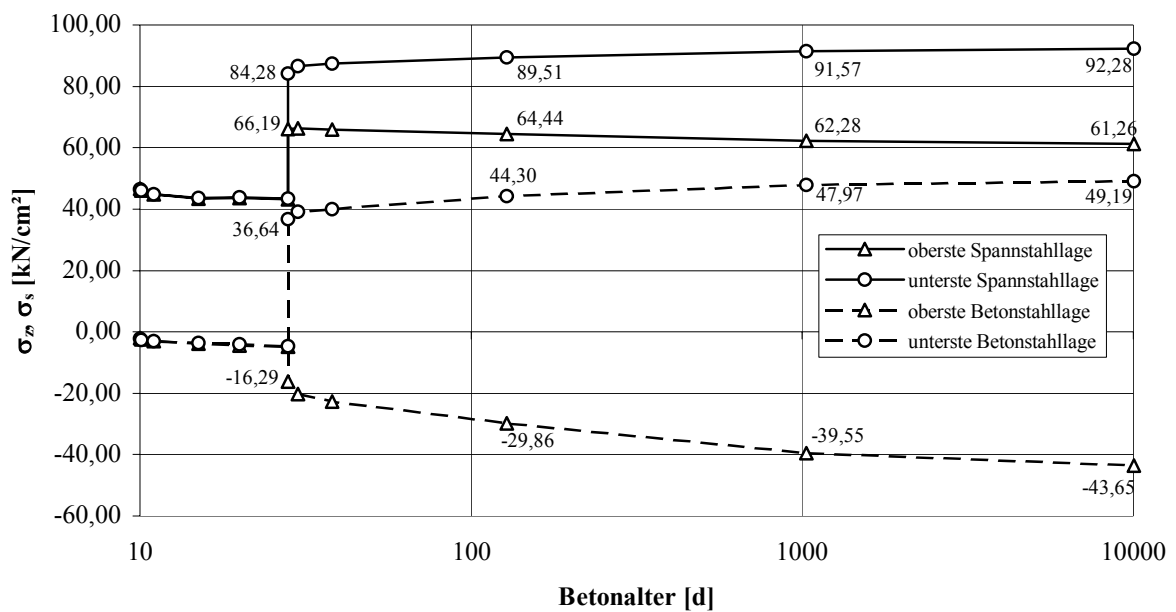
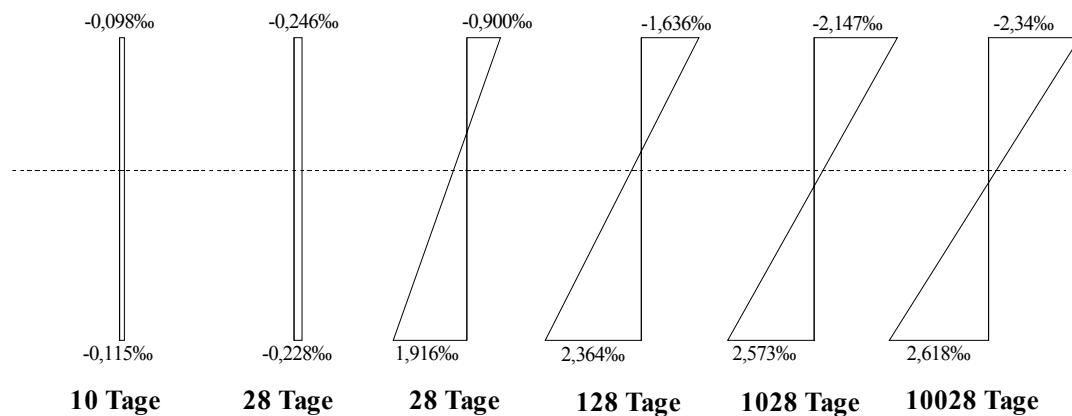
Tafel 7.2-4:

-nichtlineares Kriechen
 -Zustand II
 -Berücksichtigung der Spannstahlrelaxation

Belastung:

$t = 10..28$ Tage:
 aus g_1
 $M = 684$ kNm

$t = 28..∞$ Tage:
 aus g_1 und $g_2 + p_D$
 $M = 2628$ kNm

Betonspannungen in [kN/cm²]**Dehnungen des Gesamtquerschnitts**

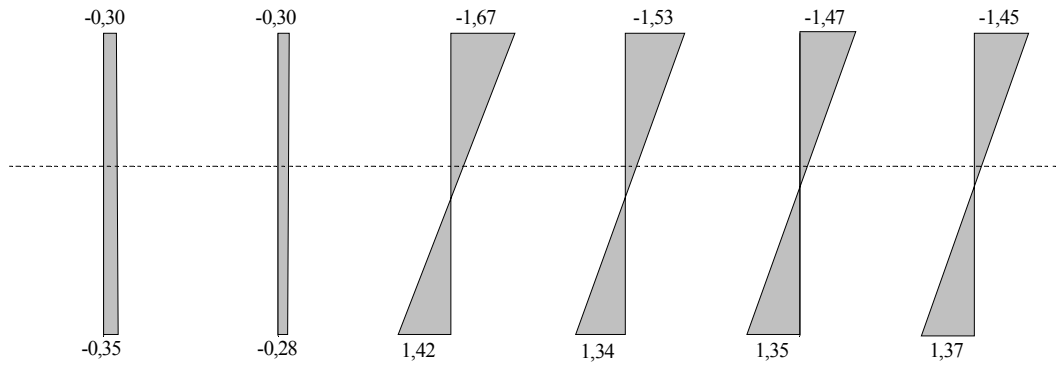
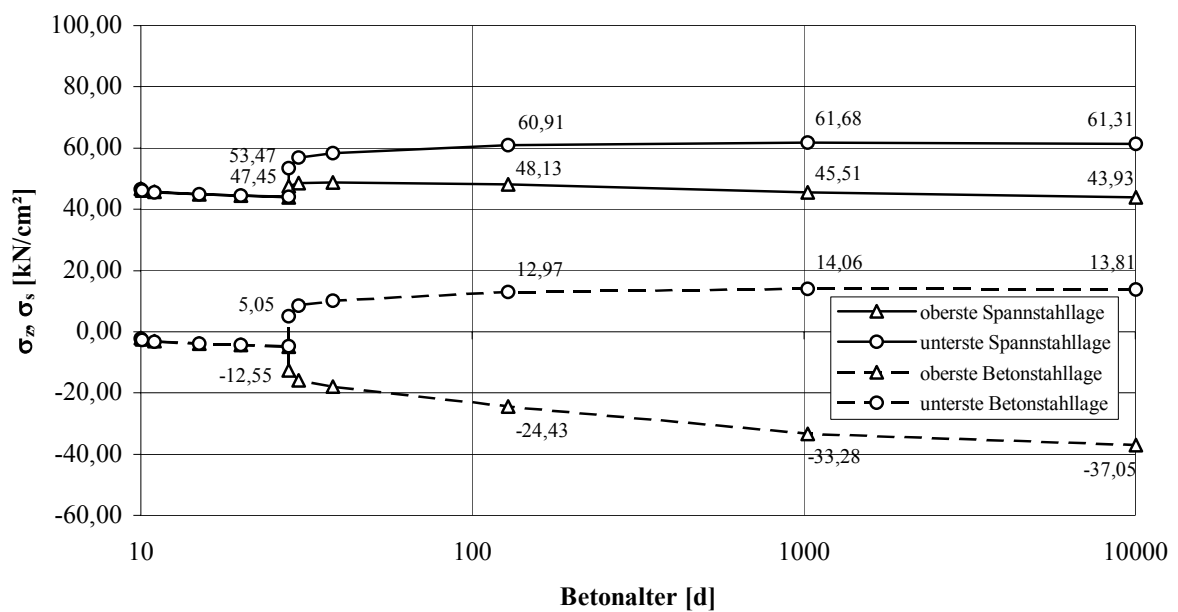
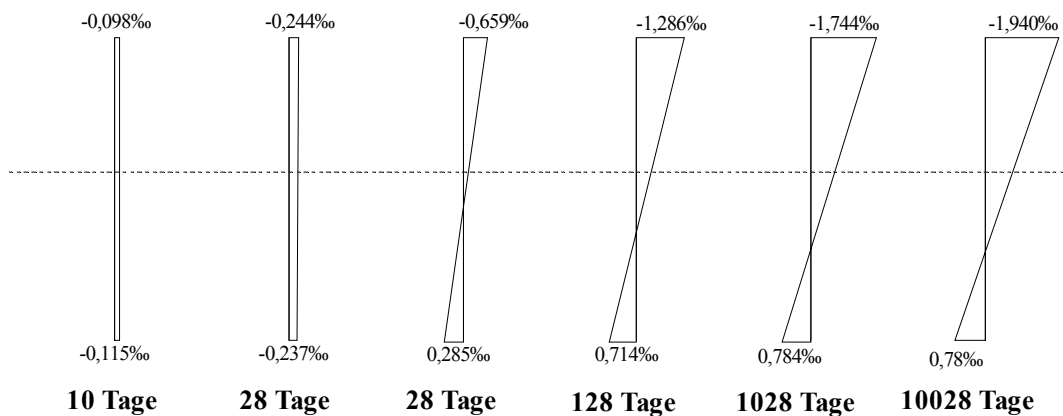
Tafel 7.2-5:

-nichtlineares Kriechen
 -Zustand I
 -Vernachlässigung der Spannstahlrelaxation

Belastung:

t = 10..28 Tage:
 aus g_1
 M = 684 kNm

t = 28..∞ Tage:
 aus g_1 und g_2+p_D
 M = 2628 kNm

Betonspannungen in [kN/cm²]**Dehnungen des Gesamtquerschnitts**

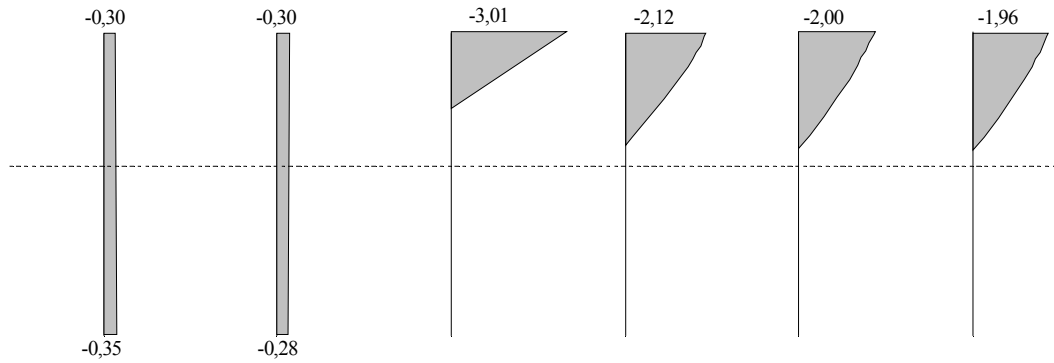
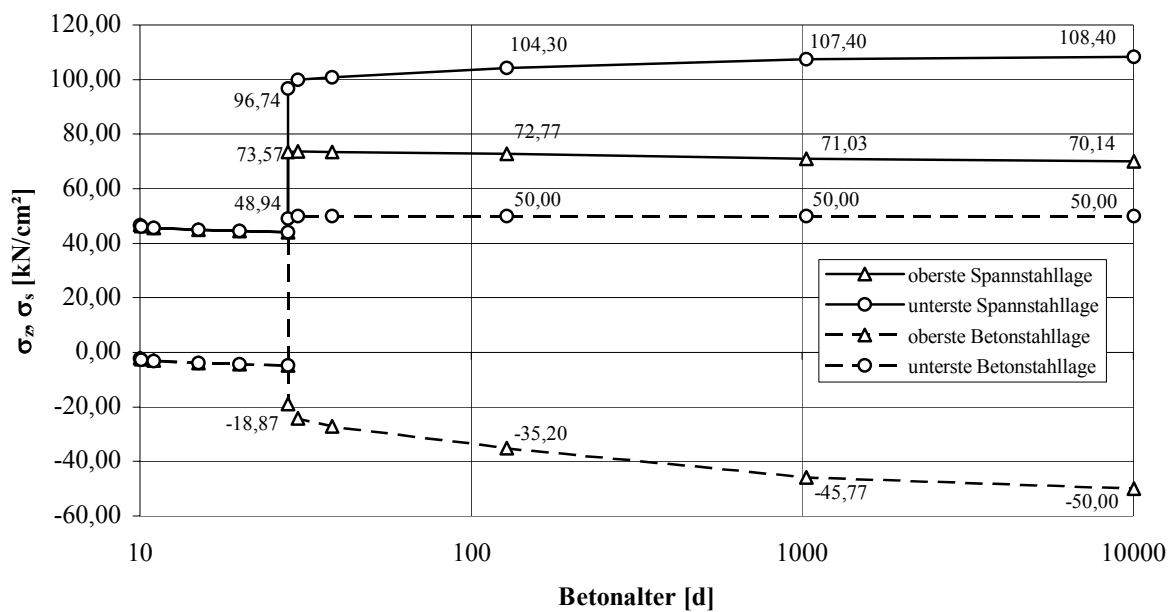
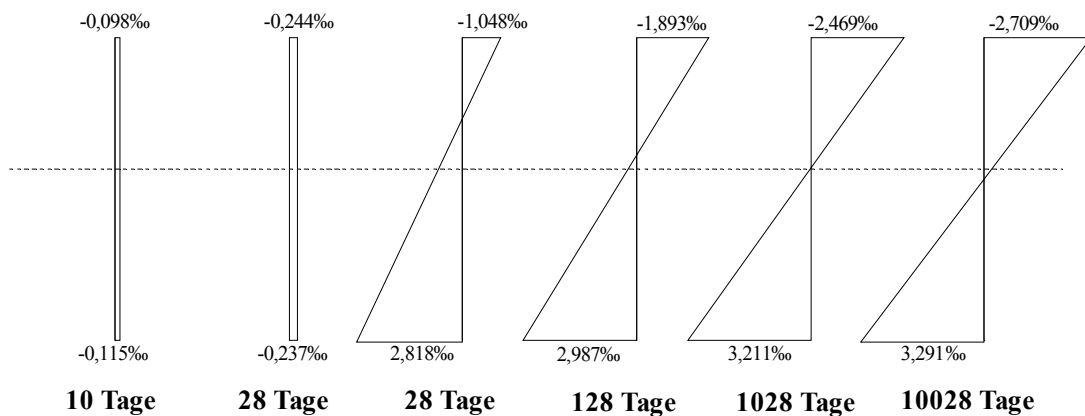
Tafel 7.2-6:

-nichtlineares Kriechen
 -Zustand II
 -Vernachlässigung der Spannstahlrelaxation

Belastung:

t = 10..28 Tage:
 aus g_1
 M = 684 kNm

t = 28..∞ Tage:
 aus g_1 und g_2+p_D
 M = 3060 kNm

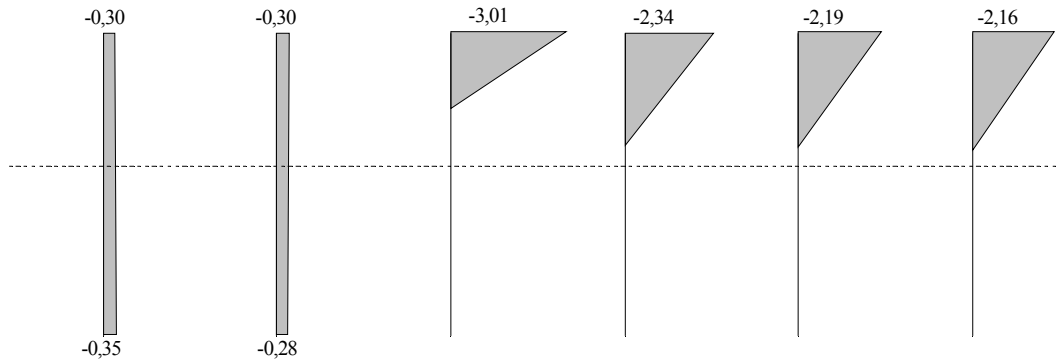
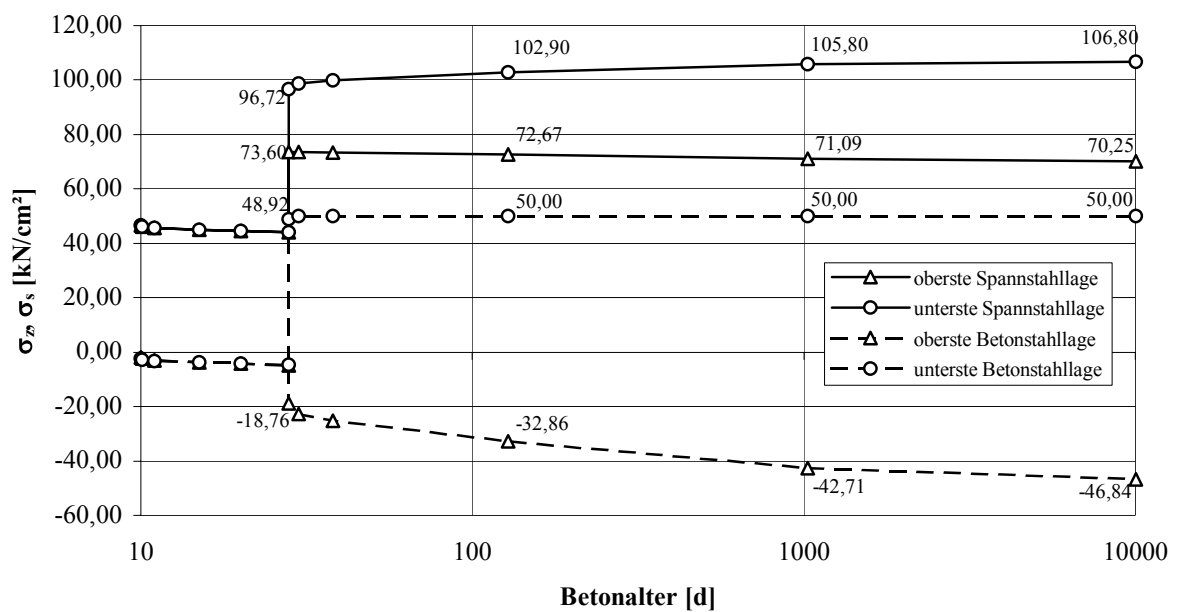
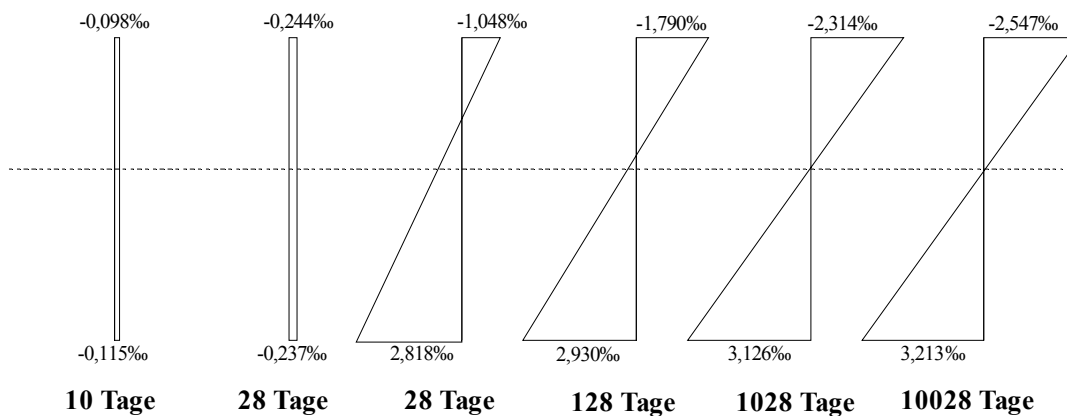
Betonspannungen in [kN/cm²]**Dehnungen des Gesamtquerschnitts**

Tafel 7.2-7:

-lineares Kriechen

-Zustand II

-Vernachlässigung der Spannstahlrelaxation

Belastung: $t = 10..28$ Tage:aus g_1 $M = 684$ kNm $t = 28..\infty$ Tage:aus g_1 und g_2+p_D $M = 3060$ kNm**Betonspannungen in [kN/cm²]****Dehnungen des Gesamtquerschnitts**

Durch das zentrische Schwinden erfährt der Querschnitt eine, über seine gesamte Höhe konstante, zeitabhängige Stauchung. Aufgrund der abnehmenden Stahldehnungen hat das Schwinden des Betons genau die entgegengesetzten Auswirkungen wie das Kriechen, d.h. zunehmende Betonrandspannungen (bei Vernachlässigung einer Druckbewehrung) und Riß-tiefen, sowie abnehmende Stahlzugspannungen, zur Folge. Bei sich sehr nah an der Nulllinie befindender Zugbewehrung ist die Stauchung infolge Schwinden zumeist größer als die Zusatzdehnung infolge Kriechen, so daß die zugehörigen Stahlspannungen bei Berücksichtigung beider Effekte insgesamt abnehmen (siehe Beispiel - oberste Spannstahllage). In dem vorliegenden Beispiel ist der Einfluß des Kriechens gegenüber dem Schwindeinfluß klar dominierend. Ein sehr geringes Spannungsniveau und das Schwinden stark begünstigende Umweltbedingungen können allerdings zur Umkehrung dieser Relation führen [7.3].

Aus der Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens ergeben sich keine prinzipiellen Ergebnisunterschiede im Vergleich zur Berechnung mit linearer Kriechtheorie. Die prozentualen Unterschiede der sich unter Zugrundelegen von Zustand II ergebenden Spannungsänderungen zu den Zeitpunkten t_{128} und t_{∞} bezogen auf den Ausgangswert der Spannungen zum Zeitpunkt des Aufbringens der zusätzlichen Dauerlast bei Berechnung mit nichtlinearer und linearer Kriechtheorie sind in Tabelle 7.2-1 zusammengefaßt.

Tabelle 7.2-1: Spannungsänderungen bei nichtlinearer und linearer Kriechtheorie (Belastungsregime 1)

| | Beton | | Spannstahl (untere Lage) | | Spannstahl (obere Lage) | | Betonstahl (untere Lage) | | Betonstahl (obere Lage) | |
|--|-------|------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------------|------------------------|-----------------------------|------------------------|----------------------------|------------------------|
| | 128 d | $\rightarrow \infty$ d | 128 d | $\rightarrow \infty$ d | 128 d | $\rightarrow \infty$ d | 128 d | $\rightarrow \infty$ d | 128 d | $\rightarrow \infty$ d |
| $\Delta\sigma_{\text{nichtlinear}}$ | 0.67 | 0.79 | 5.78 | 8.77 | -0.97 | -3.68 | 6.30 | 9.77 | -13.49 | -26.28 |
| $\Delta\sigma_{\text{linear}}$ | 0.52 | 0.66 | 4.91 | 7.85 | -0.95 | -3.55 | 5.37 | 8.77 | -11.79 | -24.59 |
| $\Delta\sigma_{\text{nichtlinear}}/\Delta\sigma_{\text{linear}}$ | 1.288 | 1.197 | 1.177 | 1.117 | 1.021 | 1.037 | 1.173 | 1.114 | 1.144 | 1.069 |

Aus der Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens resultierten die erwarteten größeren Spannungsumlagerungen. Die prozentualen Unterschiede in den umgelagerten Spannungen nehmen dabei mit zunehmender Belastungsdauer immer mehr ab. Durch das nichtlineare Kriechen findet demzufolge vor allem zu Beginn des Kriech- und Schwindzeitraums eine starke Beschleunigung der querschnittsinternen Spannungsumlagerungen statt, die sehr schnell zu einem Betonspannungsniveau führen, bei dem nur noch eine geringe Nichtlinearität des Kriechens vorhanden ist. Ab einem bestimmten Zeitpunkt stimmen die Spannungsänderungen in Bewehrung und Beton unabhängig von der verwendeten Kriechtheorie nahezu überein.

Durch die bei weiterer Belastungssteigerung (Belastungsregime 2) erzielten Ergebnisse werden diese Aussagen prinzipiell bestätigt, wobei sich insgesamt geringfügig größere prozentuale Abweichungen als die in Tabelle 7.2-1 aufgezeigten Werte ergeben.

Weiterhin wird untersucht, inwieweit sich die vereinfachende Annahme, daß der Querschnitt im ungerissenen Zustand vorliegt, auf die Berechnungsergebnisse auswirkt. Die volle Mitwirkung des Betons auf Zug führte zunächst zu den erwarteten, wesentlich geringeren

Querschnittsdeformationen und Spannungen im Beton und in der Bewehrung. Bei der anschließenden Ermittlung der Spannungumlagerungen waren vor allem die Spannungsänderungen des Stahl von Interesse, da die Betonspannungen mit zunehmender Belastungsdauer immer mehr abnehmen und somit zu jedem Zeitpunkt nach Belastungsbeginn günstigere Werte annehmen. In Tabelle 7.2-2 werden die Spannungsänderungen in der vorgespannten und schlaffen Bewehrung, berechnet unter der Annahme, daß Zustand I vorliegt, mit den unter Zugrundelegung des Zustands II ermittelten Spannungsänderungen verglichen.

Tabelle 7.2-2: Vergleich der Stahlspannungsänderung bei Berechnung im Zustand I und Zustand II

| | Spannstahl (untere Lage) | Spannstahl (obere Lage) | Betonstahl (untere Lage) | Betonstahl (obere Lage) |
|----------------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| Zustand I | 7.84 | -3.52 | 8.76 | -24.50 |
| Zustand II | 8.77 | -3.68 | 9.77 | -26.28 |
| ZustandII / ZustandI | 1.119 | 1.045 | 1.115 | 1.073 |

Die vereinfachte Ermittlung der Spannungumlagerungen im Zustand I führt trotz des wesentlich größeren Spannungsniveaus in der Betondruckzone bei Berechnung im Zustand II zu einer nur 10%-igen Unterschätzung der Umlagerungen, so daß man nach Addition der Spannungsänderungen und der im Zustand II berechneten Ausgangsspannungen ausreichende Ergebnisse für den Zeitpunkt t_{∞} erhält. Bei einer Berechnung unter Vernachlässigung der Nichtlinearität des Kriechens sind noch geringere Ergebnisunterschiede zu erwarten.

7.3 Numerische Untersuchungen zum Einfluß des nichtlinearen Kriechens auf die Tragfähigkeit schlaff bewehrter Betonstützen

In Abschnitt 6.2 wurden Ergebnisse von Vergleichsrechnungen zu Versuchen an langzeitbelasteten, schlanken Stahlbetonstützen vorgestellt. Die Berücksichtigung der Nichtlinearität des Kriechens führte dabei immer zu einem schnelleren rechnerischen Versagen der betreffenden Stütze. Die Größe des Einflusses des nichtlinearen Betonkriechens war dabei allerdings nicht konstant, d.h. bei fast jeder Stütze ergaben sich unterschiedlich große Differenzen zwischen den unter Zugrundelegung der linearen bzw. nichtlinearen Kriechtheorie berechneten Ergebnissen. Da die Anzahl der nachgerechneten Versuche vergleichsweise gering war, konnte kein allgemeingültiger Zusammenhang zwischen der Größe des Einflusses des nichtlinearen Kriechens und einzelnen Eingangsparametern hergestellt werden.

Aus diesem Grund werden zusätzlich umfangreiche numerische Untersuchungen an schlaff bewehrten, einachsig beanspruchten Stützen durchgeführt. Dabei werden folgende Eingangsparameter variiert:

- 1) Schlankheit der Stützen,
- 2) Exzentrizität der aufgebrachten Längsdruckkraft,
- 3) Belastungsintensität,
- 4) Bewehrungsgrad.

Besonderes Interesse gilt dabei der Frage, ob ein Bereich existiert, in dem unter Voraussetzung der linearen Kriechtheorie nachgewiesen werden kann, daß die Langzeitstabilität einer Stütze unter einer festgelegten Last gegeben ist während die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens zum rechnerischen Versagen der betreffenden Stütze führt.

Die Querschnittsgeometrie, die Materialkenngrößen sowie die Umweltbedingungen werden bei allen Untersuchungen konstant gehalten und sind Tafel 7.3-1 zu entnehmen. Grundlage für die Ermittlung der linearen Kriechzahlen und der Schwindmaße ist das Vorhersageverfahren nach EC2. Dabei wird der Belastungsbeginn auf ein Betonalter von 28 Tagen festgesetzt. Weiterhin wird angenommen, daß bei einer Belastungsdauer von 10000 Tagen (≈ 27.3 Jahre) der Endwert der Kriechverformungen erreicht ist.

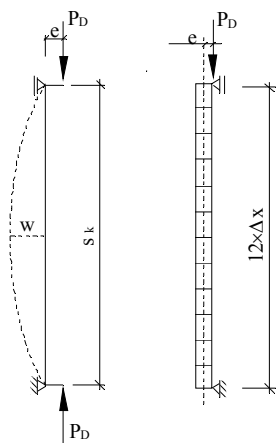
Die zeitliche Entwicklung der Druckfestigkeit sowie des Elastizitätsmoduls des Betons wurde mit den in MC90 angegebenen Funktionen ermittelt. Um annähernd wirklichkeitsnahe Berechnungsergebnisse zu erzielen wird jeweils von dem Mittelwert der entsprechenden Größe ausgegangen. Der Zuwachs des E-Moduls beträgt demnach etwa 14% bezogen auf den Ausgangswert von 3050 kN/cm^2 . Die kritische Standzeit des Betons ist nach etwa eintägiger Belastungsdauer erreicht. Zu diesem Zeitpunkt beträgt die Betondruckfestigkeit nur noch 2.61 kN/cm^2 und damit lediglich 80% der Kurzzeitfestigkeit. Durch den Einfluß der Nacherhärtung wächst die Druckfestigkeit auf den Wert 3.05 kN/cm^2 zum Zeitpunkt t_∞ .

Für die rechnerische Betonzugfestigkeit wird die Hälfte des 5%-Quantils der zentrischen Zugfestigkeit angesetzt. Diese sehr vorsichtige und damit auf der sicheren Seite liegende Abschätzung wird aufgrund der mit großen Unsicherheiten behafteten Vorhersage der Zugfestigkeit und des Verbundverhaltens getroffen.

Ein weiterer Gesichtspunkt für die Abminderung der rechnerischen Betonzugfestigkeit gegenüber Abschnitt 6.2 ergibt sich aus dem durch das Verbundkriechen hervorgerufenen Steifigkeitsabfall, der durch das Modell implizit nicht berücksichtigt wird.

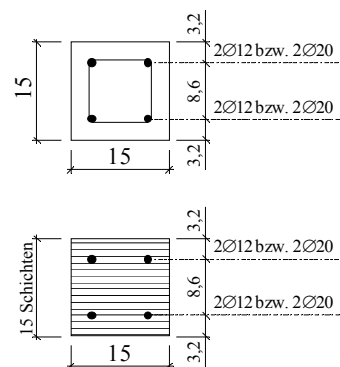
Die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens unter hohen Spannungen erfolgt durch den Kriechzahlerhöhungsfaktor nach Gl.2.4.3-11, wobei der im EC2 angegebene Mittelwert der Betondruckfestigkeit nach 20-minütiger Belastungsdauer, also $0.96 \cdot f_{cm}$, als Bezugswert gewählt wird.

statisches System und Tragwerksdiskretisierung:



$$\begin{aligned} \lambda = 50: s_k &= 2.16\text{m} \\ \lambda = 100: s_k &= 4.33\text{m} \\ \lambda = 150: s_k &= 6.50\text{m} \end{aligned}$$

Querschnitt und Schichtenmodell:

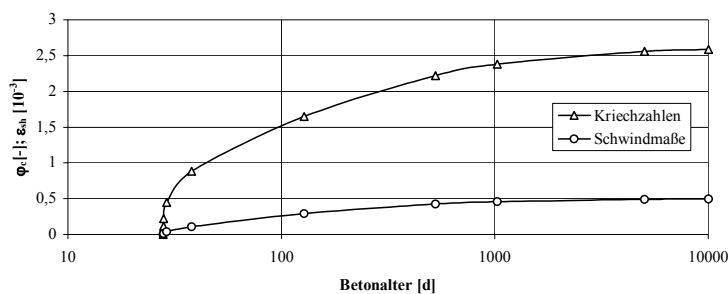


Bewehrungsgrad:

2Ø12:
Zug: $\mu = 1.00\%$
Druck: $\mu' = 1.00\%$

2Ø20:
Zug: $\mu = 2.80\%$
Druck: $\mu' = 2.80\%$

Kriechzahlen und Schwindmaße:



Umweltbedingungen:

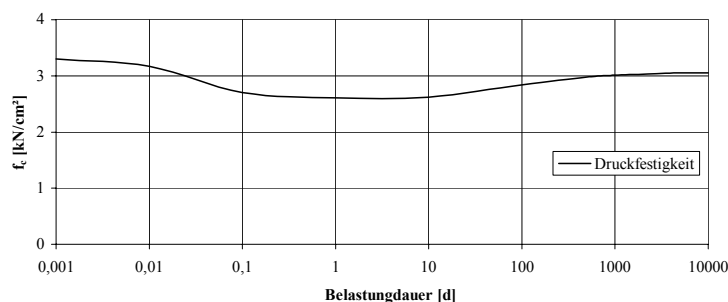
Temperatur: $T = 20^\circ\text{C}$
rel. Luftfeuchte: $RH = 65\%$

Materialkenngrößen:

Beton C25/30:
 $f_{ck} = 2.50 \text{ kN/cm}^2$
 $0.96f_{cm} = 0.96 \times 3.30 = 3.17 \text{ kN/cm}^2$
 $E_{c,28} = 3050 \text{ kN/cm}^2$
 $E_{c,\infty} = 3433 \text{ kN/cm}^2$
 $f_{ct,0.05} = 0.18 \text{ kN/cm}^2$
 $0.5f_{ct,0.05} = 0.5 \times 0.18 = 0.09 \text{ kN/cm}^2$

Betonstahl S500:
 $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$
 $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$

angenommener Verlauf der Betondruckfestigkeit:



Tafel 7.3-1: Ausgangswerte für die Berechnung

Um die Vergleichbarkeit der Berechnungsergebnisse bezüglich des Einflusses des zeitabhängigen Betonverhaltens auf die Tragfähigkeit der untersuchten Stützen zu gewährleisten wird die aufgebrachte Dauerbelastung auf die jeweilige, zuvor berechnete, Kurzzeitbruchlast bezogen.

Bei der Ermittlung der Kurzzeitbruchlasten wird von einem bilinearen Verlauf der Arbeitslinien des Betons und des Betonstahls ausgegangen. Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen wird durch die Beziehung Gl.(5.4.8-1) berücksichtigt, wobei die rechnerische Betonzugfestigkeit in Tafel 7.3-1 angegeben ist. Die Ermittlung des Grenzwerts der Tragfähigkeit erfolgt schrittweise durch Steigerung der Längskraft, bis durch den Optimierungsalgorithmus kein Gleichgewichtszustand mehr erzielt wird.

Die auf diese Weise ermittelten Kurzzeitbruchlasten sind in Abb.7.3-1 graphisch dargestellt. Der Versagenszustand ergibt sich bei gleichzeitig auf Längsdruckkraft und Biegung beanspruchten Bauteilen jeweils durch eine Kombination aus einem Stabilitäts- und einem Spannungsproblem. Mit dem Stabilitätsproblem wird dabei die verformungsbedingte Zunahme der Biegemomente erfaßt, deren Einfluß auf die Tragfähigkeit der betreffenden Stütze vor allem bei großen Stützenschlankheiten erheblich ist. Durch den Steifigkeitsabfall infolge Rißbildung des Betons wird das Anwachsen dieser Zusatzmomente weiter beschleunigt. Die Zunahme der Biegemomente führt zu einer größeren Auslastung der Tragreserven im kritischen Schnitt bis der Bruchzustand infolge Fließen des Stahls oder Betondruckbruch erreicht ist.

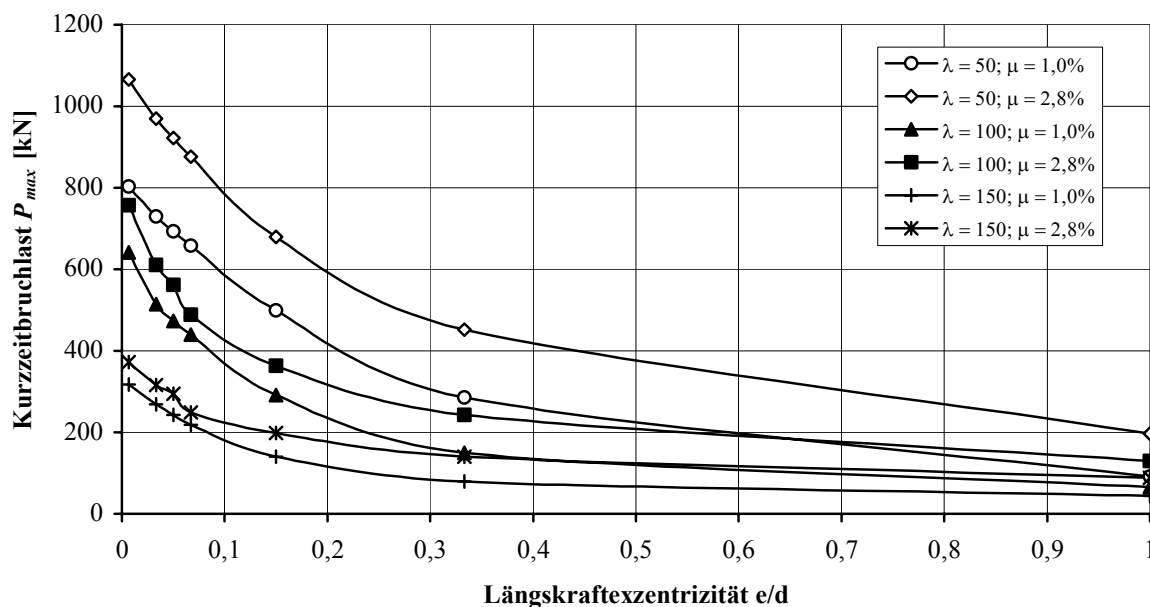


Abb.7.3-1: rechnerische Kurzzeitbruchlasten der untersuchten Stützen

Bei abnehmender Schlankheit der Stützen wird der Einfluß der geometrischen Nichtlinearität geringer, d.h. der Anteil der verformungsbedingten Zusatzmomente am Gesamtmoment im kritischen Schnitt nähert sich dem Wert 0, bei dessen Erreichen ein reines Spannungsproblem vorliegt. Mit dem Aufbringen großer planmäßiger Lastausmitten läßt sich die gleiche Tendenz erzielen.

Mit Annäherung an das reine Spannungsproblem nimmt der Einfluß des vorhandenen Bewehrungsgrades deutlich zu, da die Querschnittstragfähigkeit in erheblichem Maße von der in der Zugzone vorhandenen Bewehrung abhängt. Durch die in Abb.7.3-1 graphisch ausgewerteten Verläufe der Bruchlasten, deren Differenzen bei kleinerer Schlankheit bzw. größerer Lastexzentrizität zunehmen, wird diese Aussage bestätigt.

Für die theoretischen Untersuchungen zum Langzeitverhalten der Stahlbetonstützen werden die aufzubringenden Dauerlasten prozentual aus den den jeweiligen Stützen zugeordneten Kurzzeitbruchlasten ermittelt. Dabei beträgt die minimal aufgebrachte Last 20% der zugehörigen Kurzzeitbruchlast. Unter diesem Belastungsniveau wird der Grenzzustand der Tragfähigkeit bei keiner der untersuchten Stützen erreicht.

Die sukzessive Steigerung der Belastungsintensität führt früher oder später zum Versagen der Stützen unter konstanter Dauerlastbeanspruchung. Dabei lassen sich im allgemeinen nachfolgende Tendenzen beschreiben. Abweichungen von diesen Tendenzen resultieren aus dem nichtlinearen Materialverhalten des Betons (Rißbildung in der Zugzone, Plastizierung der Betondruckzone) bzw. des Bewehrungsstahls (Fließen des Stahls).

1) Die Belastungsintensität, unter der der rechnerische Bruchzustand erreicht wird, ist um so kleiner je schlanker die Stütze und desto niedriger der Bewehrungsgrad ist. Die niedrigsten errechneten Werte der Langzeittragfähigkeit bezogen auf die zugeordneten Werte Kurzzeittragfähigkeit sind in Abhängigkeit der Stützenschlankheit λ und des Bewehrungsgrades μ in Tabelle 7.3-1 zusammengefaßt. Dabei ergeben sich die minimalen Werte für verschiedene bezogene Exzentrizitäten e/d .

Tabelle 7.3-1: minimale Verhältnisswerte Langzeittragfähigkeit/Kurzzeittragfähigkeit

| | $\lambda = 50$ | $\lambda = 100$ | $\lambda = 150$ |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\mu = \mu' = 1.00\%$ | 51.8% ($e/d = 0.067$) | 44.1% ($e/d = 0.090$) | 37.8% ($e/d = 0.067$) |
| $\mu = \mu' = 2.80\%$ | 63.6% ($e/d = 0.150$) | 55.6% ($e/d = 0.033$) | 47.3% ($e/d = 0.033$) |

Diese Tendenz liegt in Übereinstimmung mit den Aussagen über die Auswirkungen einer Berechnung nach Theorie II.Ordnung, wonach der Einfluß der geometrischen Nichtlinearität ebenfalls mit steigender Stützenschlankheit und abnehmender Querschnittssteifigkeit zunimmt. Die zusätzlichen Langzeitauslenkungen infolge Kriechen und Schwinden tragen demzufolge zu einem progressiven Anwachsen der verformungsbedingten Zusatzmomente bei, deren Anteil am gesamten Schnittgrößenzustand mit wachsender Belastungsdauer erheblich größer wird.

Die sich bei der Vergrößerung der planmäßigen Lastausmitte einstellende teilweise Umkehrung der Tendenz, daß der Einfluß des Kriechens auf die Tragfähigkeit mit zunehmender Stützenschlankheit größer wird, ist in dem unterschiedlich großen Einfluß der zwei möglichen Versagensursachen begründet. Im Unterschied zu den Stützen größerer Schlankheit, bei denen das zeitliche Anwachsen der Zusatzmomente fast ausschließlich für den Bruch der entsprechenden Stütze verantwortlich ist, wird der Versagenszustand von Stützen geringerer Schlankheit außerdem durch zusätzliche zeitabhängige Längsstauchungen erheblich beeinflusst. Infolge dieser Längsstauchungen beginnt die, aufgrund der größeren aufgetragenen Last von vornherein in stärkerem Maß ausgelastete, Druckzonbewehrung ab einem bestimmten Zeitpunkt zu fließen. Die mit den Zusatzmomenten korrespondierenden inneren Druckspannungen müssen ab diesem Zeitpunkt vollständig vom Beton aufgenommen werden, da eine Spannungsumlagerung auf die Bewehrung nicht mehr möglich ist.

Bei weiterem Anwachsen der Zusatzmomente kommt es zur Plastizierung der Betondruckzone, infolgedessen die Querschnittssteifigkeit im kritischen Schnitt zusätzlich abfällt. Der daraus resultierende sprunghafte Anstieg der Zusatzausmitte führt zum vorzeitigen Versagen der entsprechenden Stütze.

2) Der Einfluß des Kriechens verändert sich mit wachsender planmäßiger Lastausmitte. Dabei ist das anfängliche Anwachsen des Kriecheinflusses damit zu begründen, daß die Stützenquerschnitte bei sehr kleiner planmäßiger Längskraftexzentrizität vorerst voll überdrückt sind und ein Steifigkeitsabfall infolge Rißbildung des Betons erst mit Beginn der Plastizierung des mehr gedrückten Randes eintritt, da dann eine positive Stahlspannung zur Erlangung des Momentengleichgewichts erforderlich wird. Bei einer planmäßigen Lastausmitte nahe dem Wert 0 erfahren die Stützensauslenkungen durch das zeitabhängige Betonverhalten nur einen sehr geringen Zuwachs, infolgedessen sich die Stützenquerschnitte auch nach der Beendigung des Kriech- und Schwindprozesses im ungerissenen Zustand (Zustand I) befinden.

Mit einer Erhöhung der planmäßigen Lastausmitte wird durch die zusätzliche Kriecheausmitte das Auftreten der Rißbildung des Betons in der Zugzone hervorgerufen, wobei sich der Zeitraum bis zum Beginn der Rißbildung mit wachsender planmäßiger Lastausmitte immer mehr verkürzt. Im Vergleich zu der zugehörigen Kurzzeittraglast liegt somit ab dem Zeitpunkt des Eintretens der Rißbildung für die Ermittlung der Langzeittraglast eine wesentlich weichere Struktur vor. Aus dem nun eintretenden sprunghaften Anwachsen der Zusatzverformungen ergibt sich aufgrund der vorhandenen größeren elastischen Dehnung auch eine schnellere Zunahme der Kriechverformungen, aus denen wegen der linearen Abhängigkeit der Zusatzmomente von den Stützensauslenkungen das wesentlich frühere Erreichen des rechnerischen Bruchzustands resultiert.

Bei weiterem Ansteigen der Lastausmitte liegt schon vor dem Eintreten des Kriechens und Schwindens eine Tragstruktur vor, die durch die Rißbildung des Betons einen gewissen Steifigkeitsabfall erfahren hat, so daß der Verhältniswert der verformungsbedingten Zusatzausmitten nach Beendigung und vor Beginn des Kriech- und Schwindprozesses kleiner wird. Der Einfluß des zeitabhängigen Betonverhalten auf die Tragfähigkeit nimmt demzufolge wieder ab.

3) Die Berücksichtigung der Nichtlinearität des Kriechens führte jeweils zu einem früheren Versagen der betreffenden Stützen im Vergleich zur Berechnung unter Zugrundelegung der linearen Kriechtheorie. Eine Ausnahme bildete die Stütze mit den Kennwerten ($\lambda=50$; $\mu = \mu' = 2.80\%$; $e/d = 0.0067$; $\eta = 0.8$). Bei der Langzeitanalyse unter Voraussetzung einer spannungsunabhängigen Kriechfunktion versagte die Stütze rechnerisch infolge Bruch der Betondruckzone nach ca. 15min. und damit noch vor dem Zeitpunkt, an dem das angenommene Minimum der Betondruckfestigkeit (Dauerstandsfestigkeit) erreicht wurde.

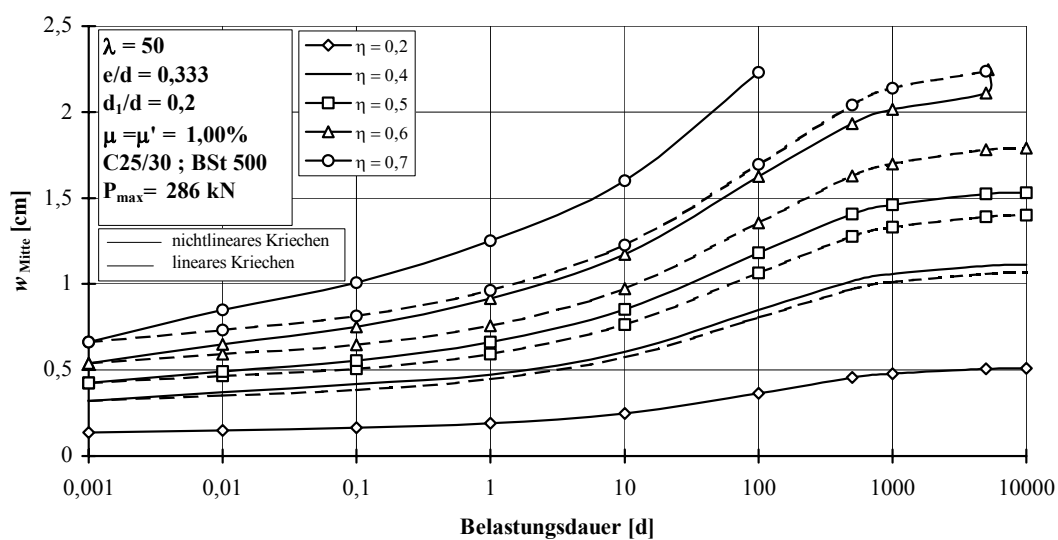
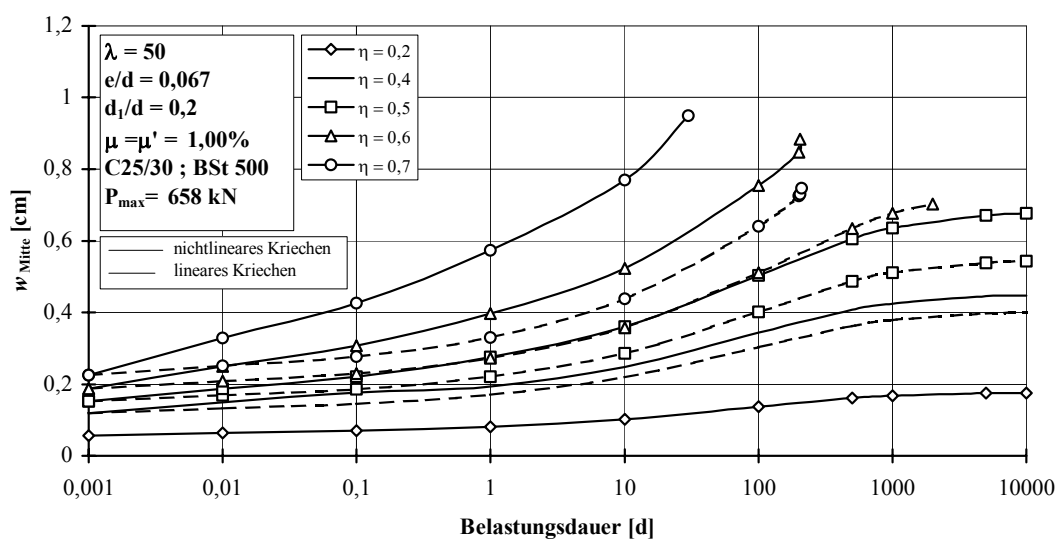
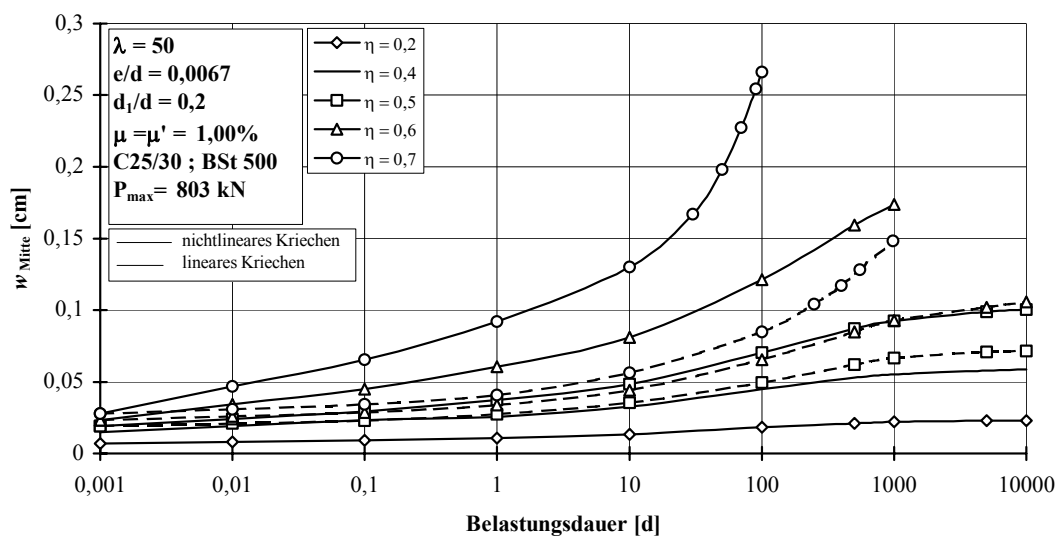
Im Unterschied dazu wurde die Spannungsumlagerung vom Beton auf den Stahl durch die Einbeziehung einer nichtlinearen Kriechfunktion in solchem Maße beschleunigt, daß die Betonrandspannung zum entsprechenden Zeitpunkt unterhalb der Dauerstandsfestigkeit liegt und keine Plastizierung der Betondruckzone auftritt. Die Stütze versagt rechnerisch erst nach einer Belastungsdauer von 100 Tagen.

4) Mit dem allgemein abnehmenden Einfluß des zeitabhängigen Betonverhaltens nimmt der Einfluß des nichtlinearen Kriechens prinzipiell zu. Es existiert ein Bereich, in dem unter Voraussetzung der linearen Kriechtheorie nachgewiesen werden kann, daß die Langzeitstabilität einer Stütze unter einer festgelegten Last gegeben ist, während die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens zum rechnerischen Versagen der betreffenden Stütze führt. Die maximalen und minimalen Langzeittragfähigkeiten bei der Berechnung mit linearer bzw. nichtlinearer Kriechtheorie sind in Tabelle 7.3-2 zusammengestellt. Dabei ergeben sich die maximalen Werte ausnahmslos für die größte untersuchte Längskraftexzentrizität $e/d=1.0$.

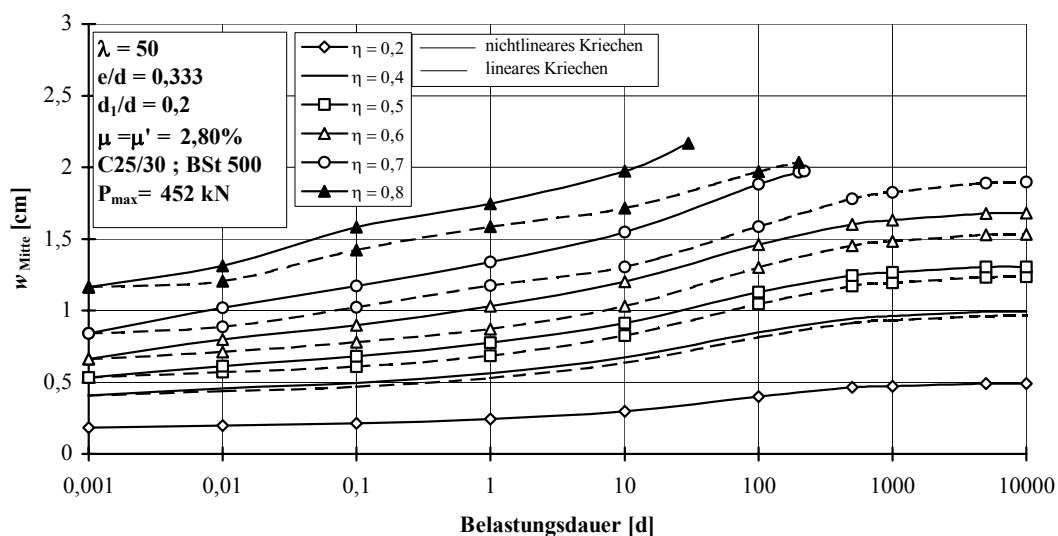
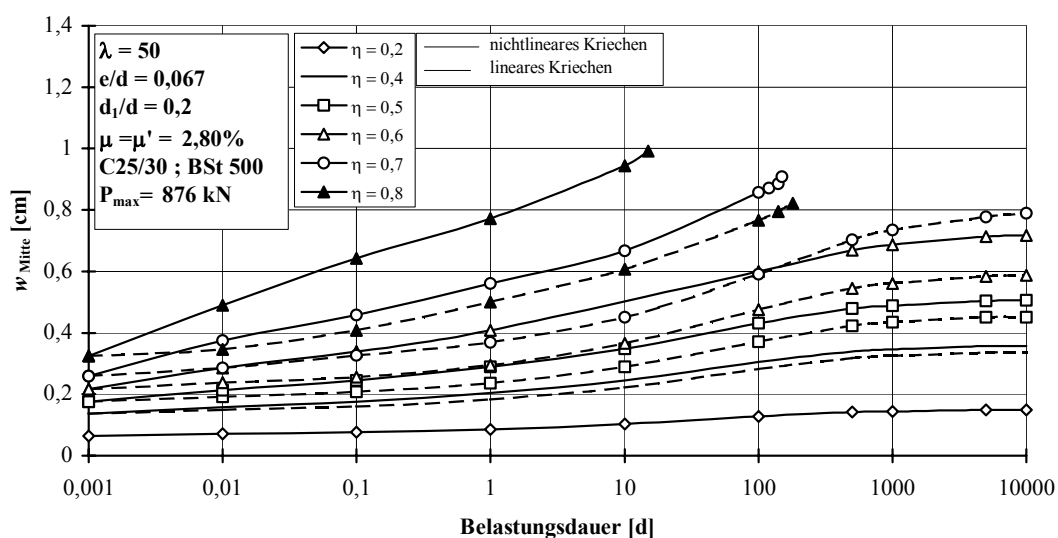
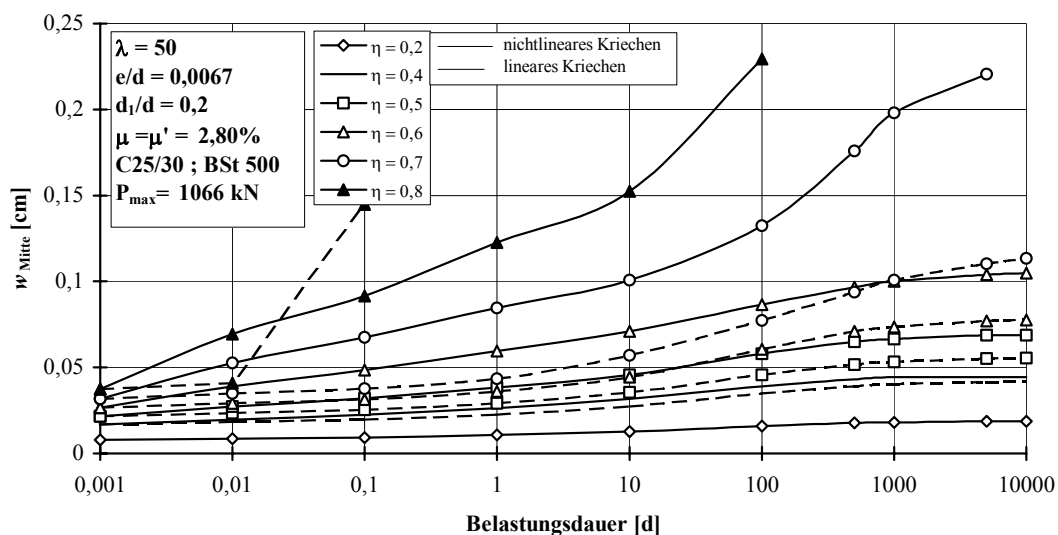
Tabelle 7.3-2: minimale und maximale Langzeittragfähigkeit im Verhältnis zur Kurzzeittragfähigkeit bei Berechnung mit linearer und nichtlinearer Kriechtheorie

| $\mu = \mu'$ | Kriechfunktion | $\lambda = 50$ | | $\lambda = 100$ | | $\lambda = 150$ | |
|--------------|----------------|----------------|-------|-----------------|-------|-----------------|-------|
| | | min. | max. | min. | max. | min. | max. |
| 1.00% | linear | 58.0% | 86.4% | 45.5% | 78.4% | 38.0% | 76.0% |
| 1.00% | nichtlinear | 51.8% | 75.5% | 44.1% | 76.8% | 37.8% | 74.4% |
| 2.80% | linear | 69.8% | 82.4% | 55.6% | 90.0% | 48.3% | 85.4% |
| 2.80% | nichtlinear | 63.6% | 74.0% | 54.8% | 82.0% | 47.3% | 82.5% |

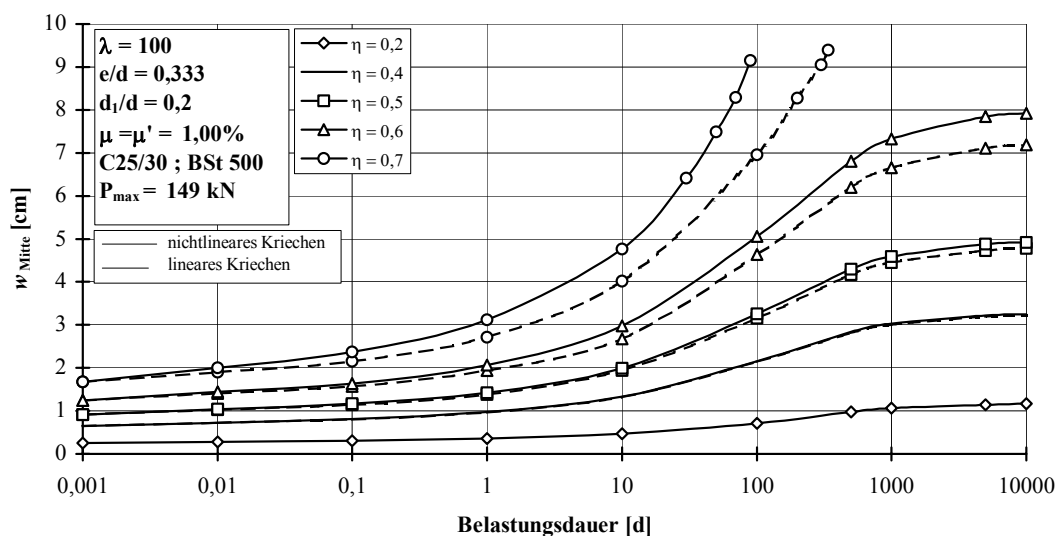
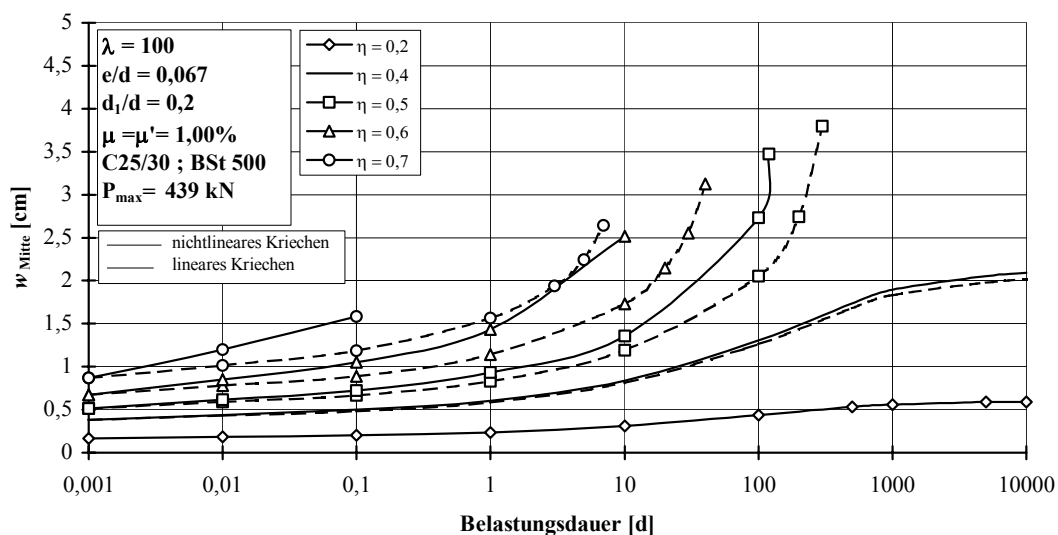
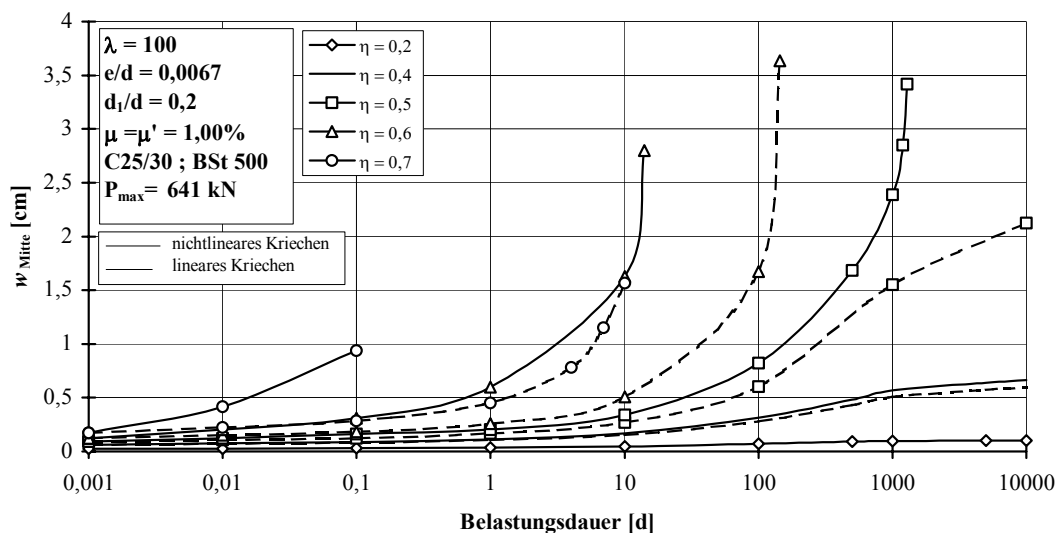
In den nachfolgenden Diagrammen sind die wichtigsten Berechnungsergebnisse graphisch aufbereitet.



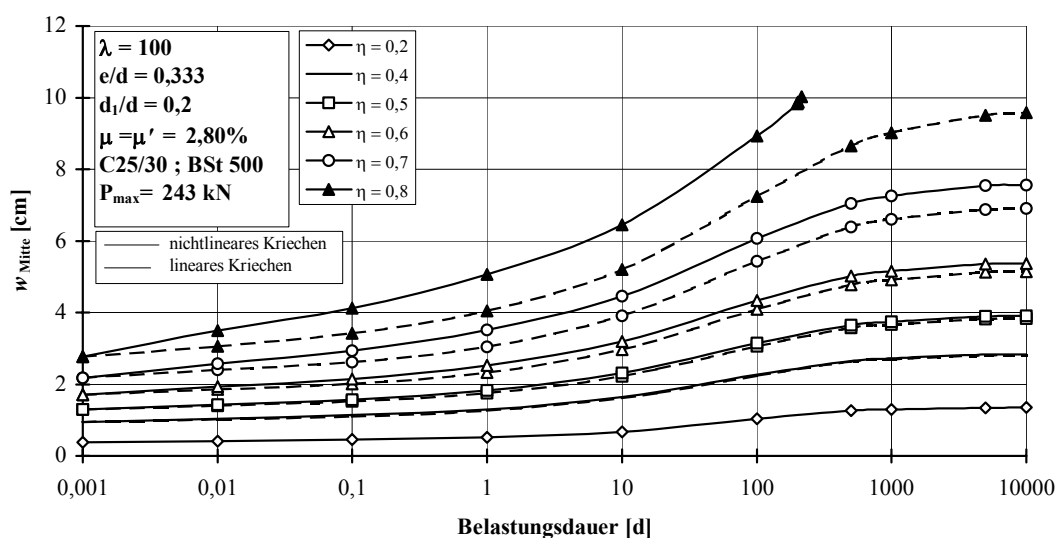
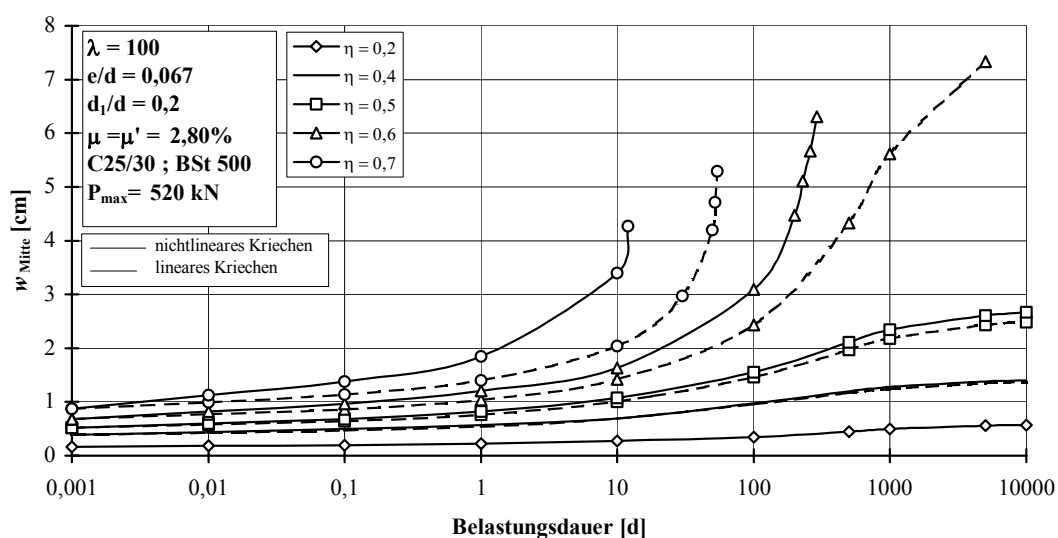
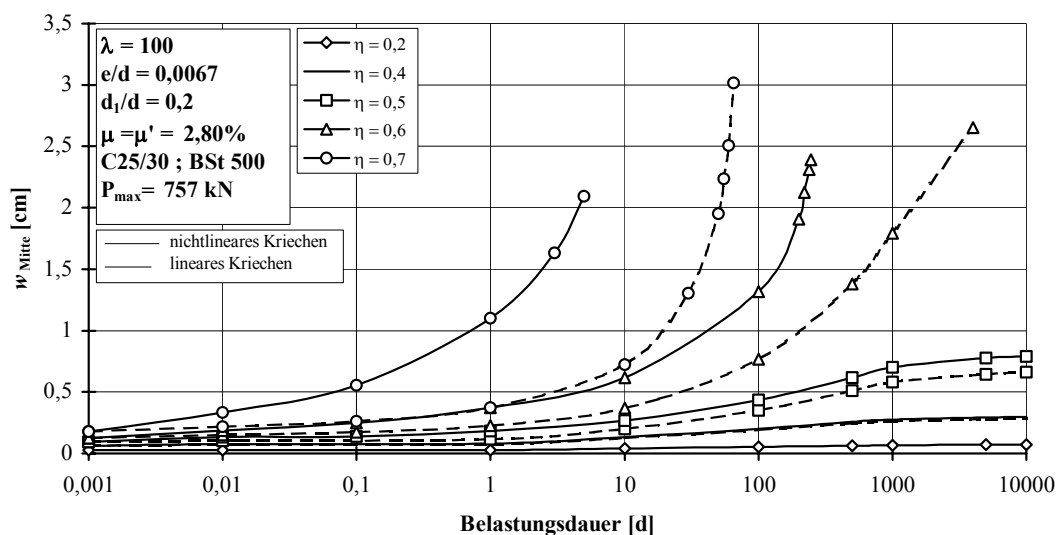
Tafel 7.3-1: zeitabhängige Entwicklung der Stützensauslenkungen in Feldmitte ($\lambda=50$; $\mu=\mu'=1.00\%$)



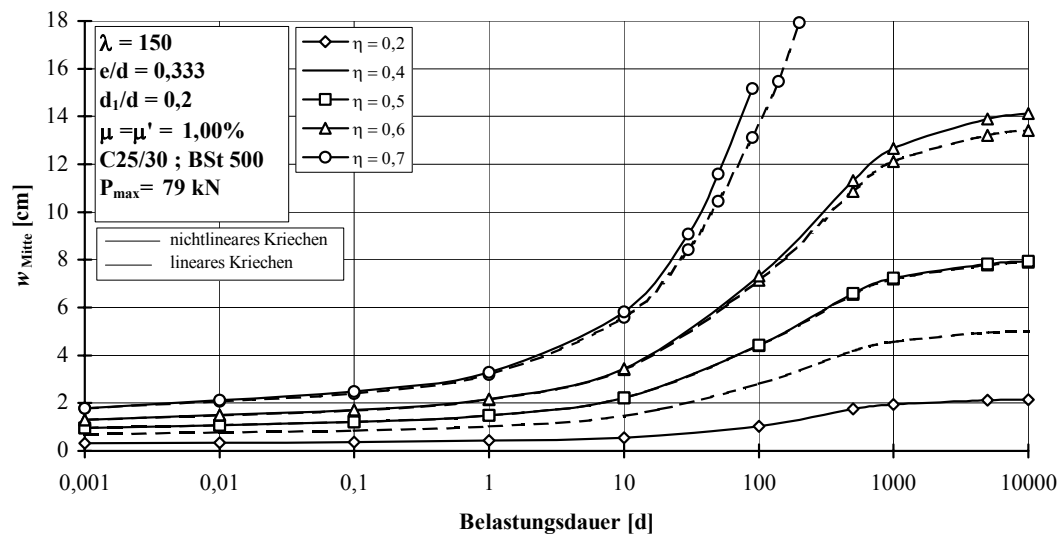
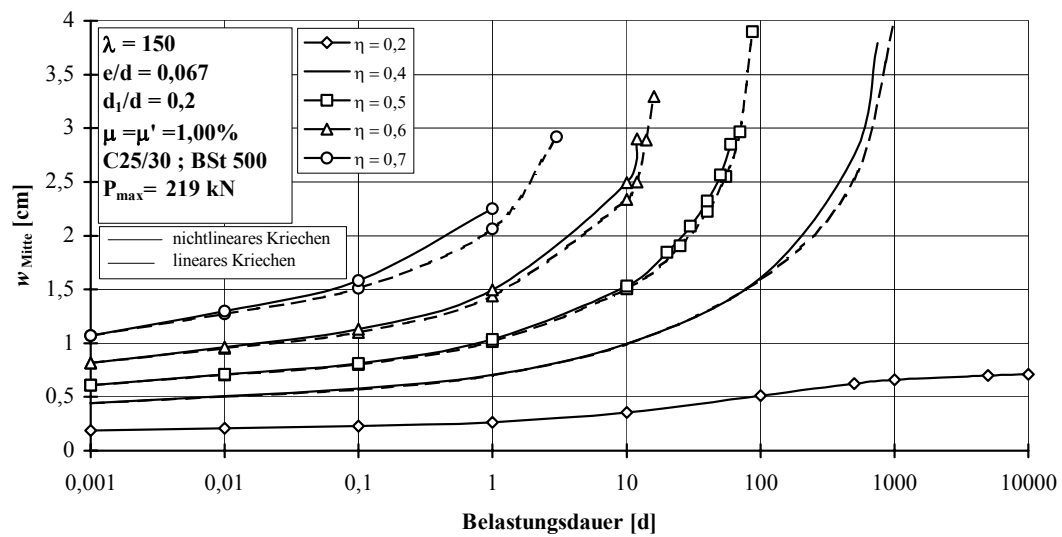
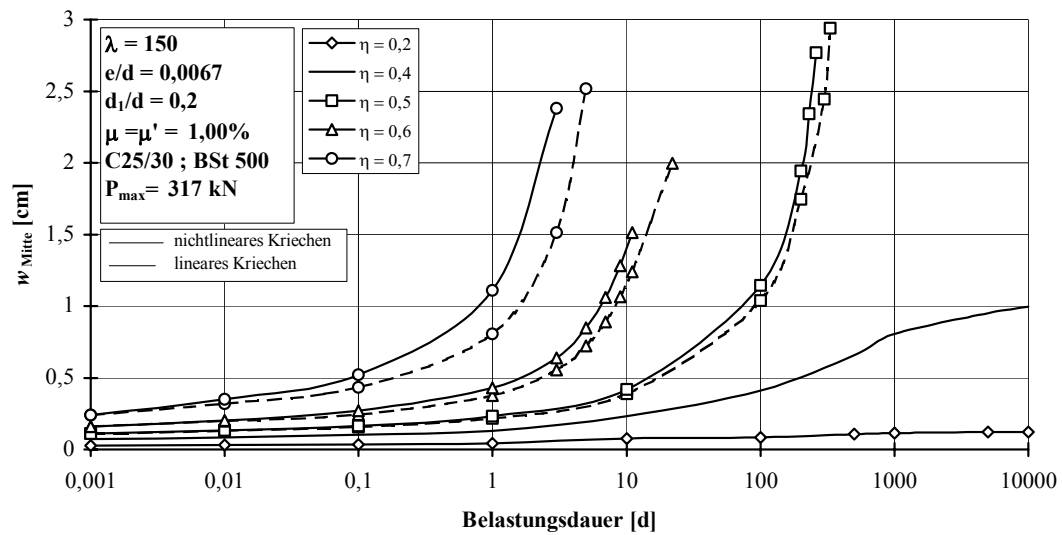
Tafel 7.3-2: zeitabhängige Entwicklung der Stützensauslenkungen in Feldmitte ($\lambda=50$; $\mu=\mu'=2.80\%$)



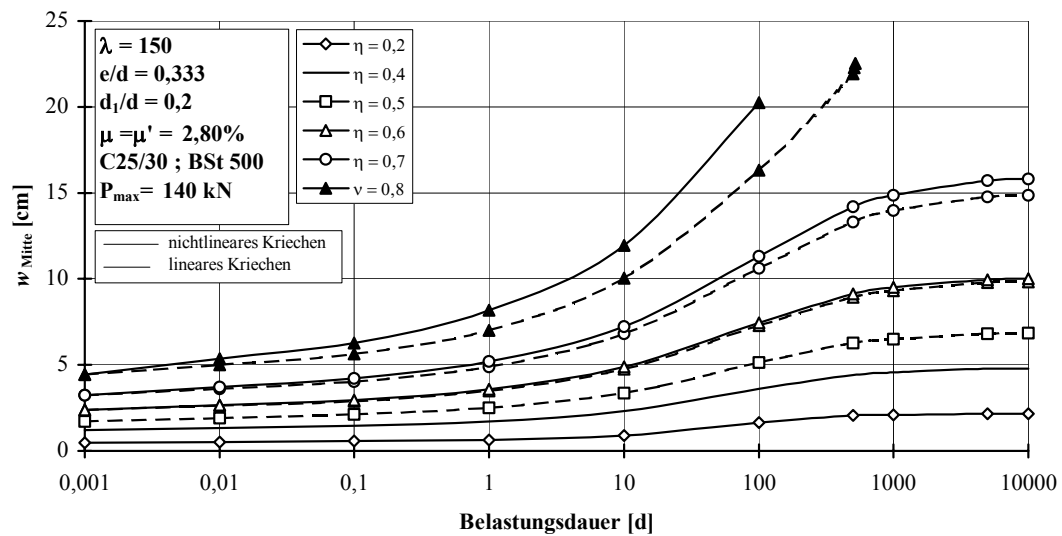
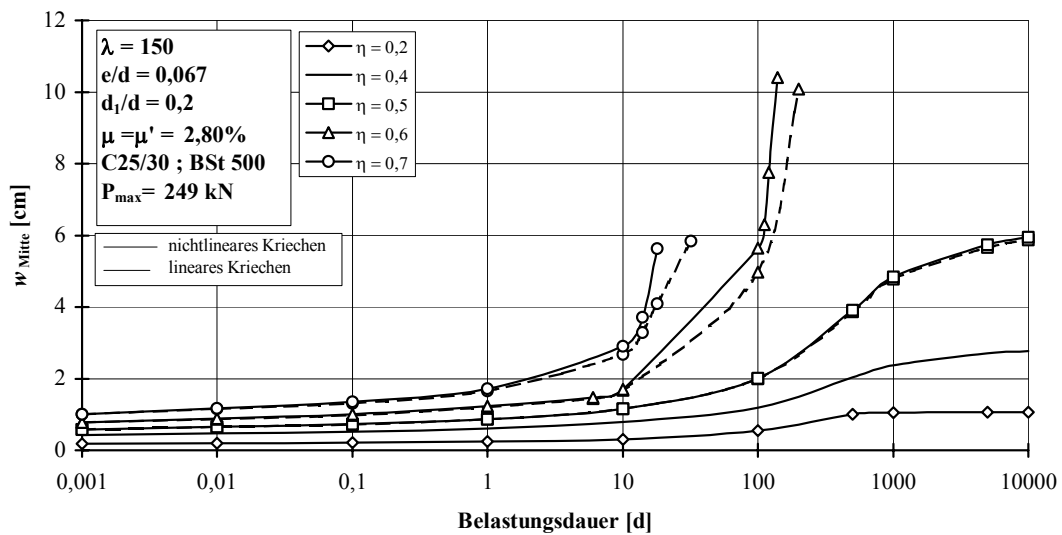
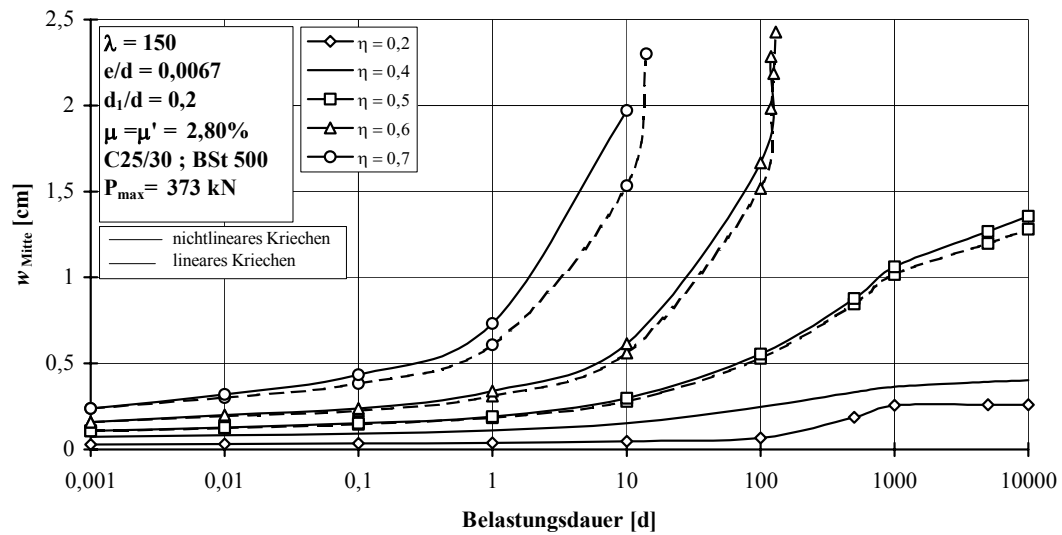
Tafel 7.3-3: zeitabhängige Entwicklung der Stützensauslenkungen in Feldmitte ($\lambda=100$; $\mu=\mu'=1.00\%$)



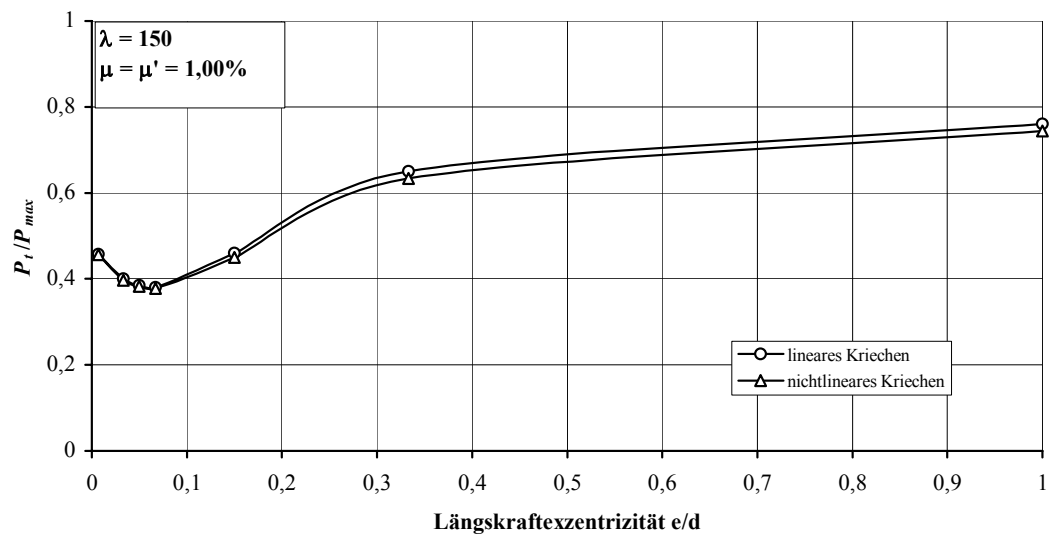
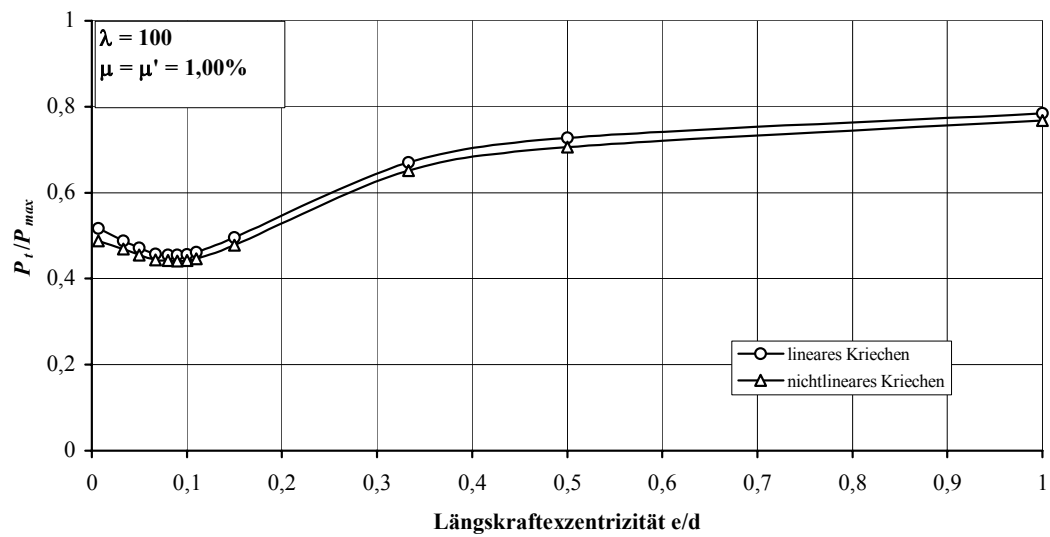
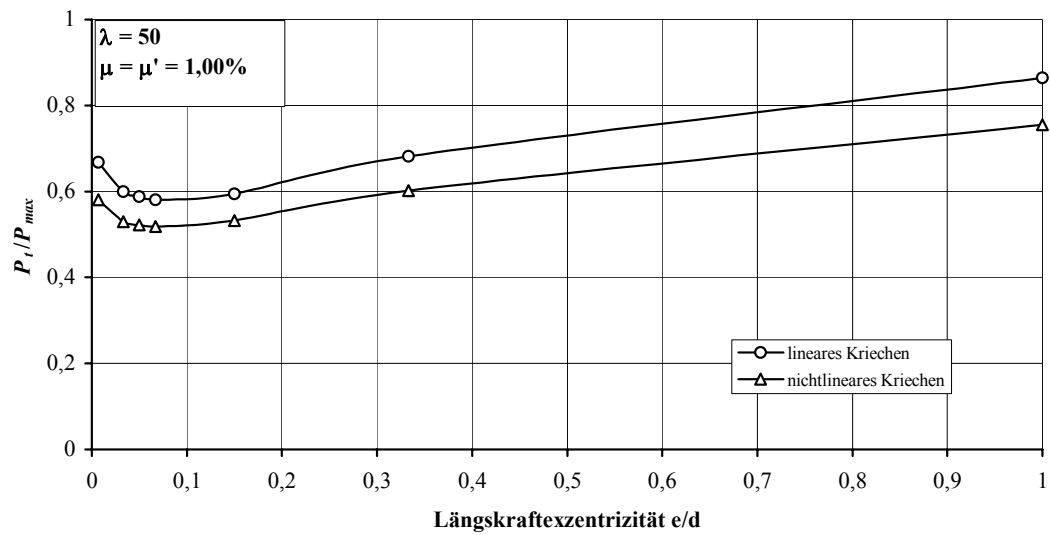
Tafel 7.3-4: zeitabhängige Entwicklung der Stützensauslenkungen in Feldmitte ($\lambda=100$; $\mu=\mu'=2.80\%$)



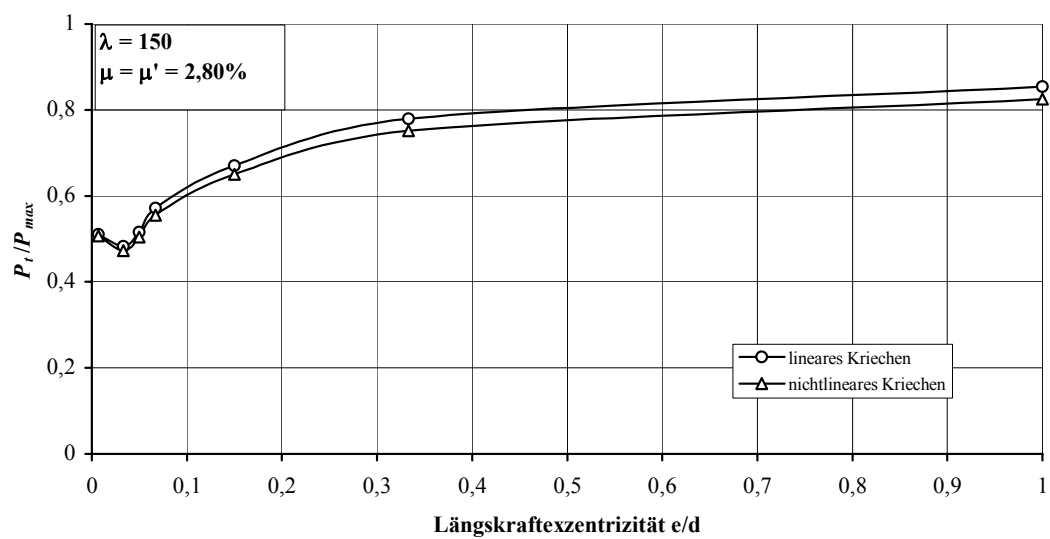
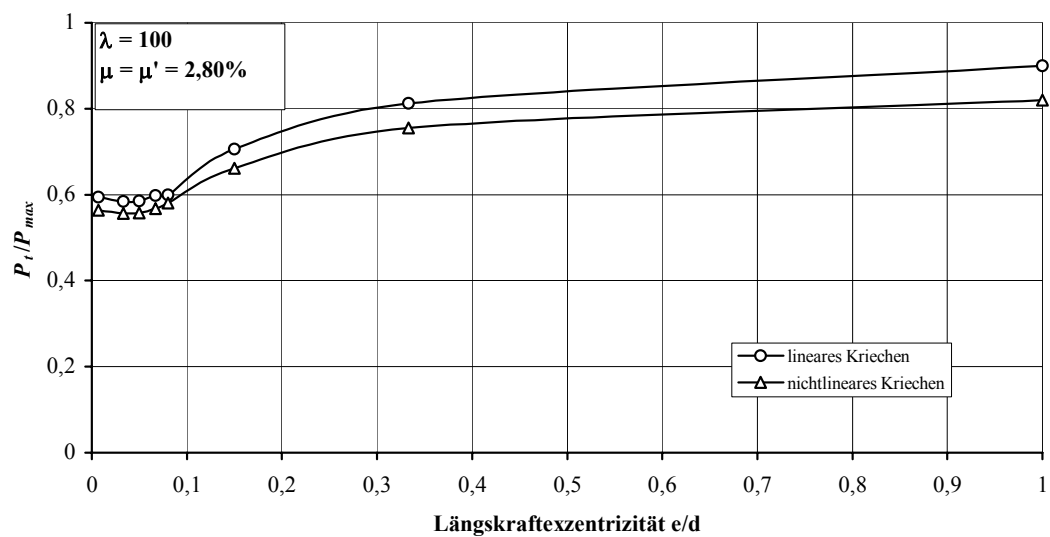
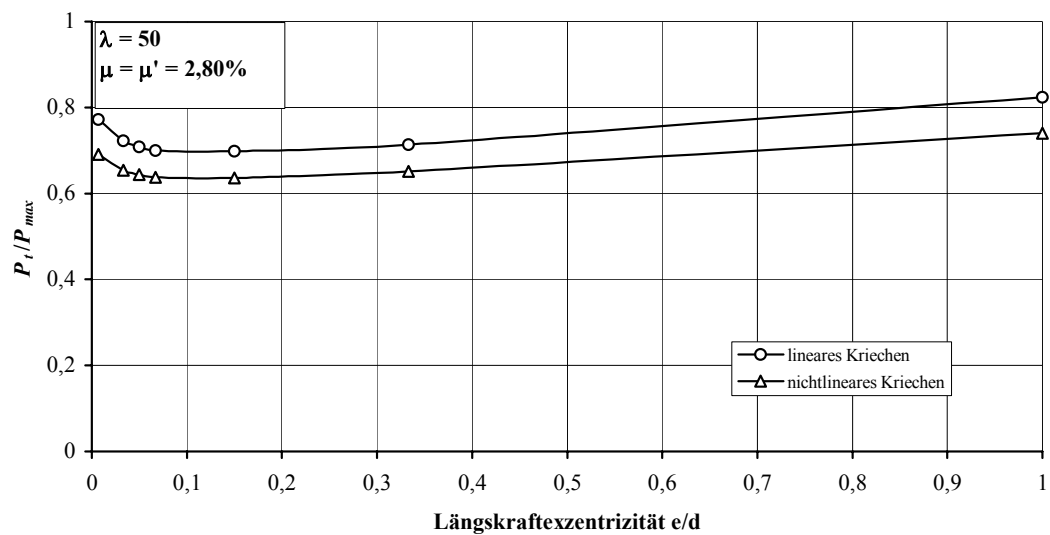
Tafel 7.3-5: zeitabhängige Entwicklung der Stützensauslenkungen in Feldmitte ($\lambda=150$; $\mu=\mu'=1.00\%$)



Tafel 7.3-6: zeitabhängige Entwicklung der Stützensauslenkungen in Feldmitte ($\lambda=150$; $\mu=\mu'=2.80\%$)



Tafel 7.3-7: auf die zugehörige Kurzzeitbruchlast bezogene Langzeitbruchlasten ($\mu=\mu'=1.00\%$)



Tafel 7.3-8: auf die zugehörige Kurzzeitbruchlast bezogene Langzeitbruchlasten ($\mu=\mu'=2.80\%$)

8 Schlußfolgerungen

8.1 Zusammenfassung

Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zur realistischen Erfassung der Auswirkungen des zeitabhängigen Materialverhaltens des Betons und des Spannstahls auf das Tragverhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen geleistet werden. Dabei ist neben der wirklichkeitsnahen mathematischen Beschreibung der maßgeblichen Materialgesetze die Berücksichtigung der Rißbildung des Betons und geometrisch nichtlinearer Einflüsse von Bedeutung.

Die Materialgesetze des Betons und des Spannstahls werden in einer einheitlichen Formulierung angeschrieben. Um die zeitabhängigen Deformationen auch oberhalb des Gebrauchslastbereiches wirklichkeitsnah zu erfassen, wird bei der Formulierung der Kriechgesetze besonderer Wert auf die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechverhaltens unter hoher Spannung gelegt. Dabei wird gezeigt, daß unter Berücksichtigung einer spannungsabhängigen Kriechfunktion nur ein Kriechgesetz auf der Grundlage einer differentiellen Formulierung eine exakte Beschreibung des Langzeitverhaltens unter veränderlicher Spannungsgeschichte liefern kann.

Die zeitliche Diskretisierung der Materialgesetze erfolgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung, wobei der unbekannte, veränderliche Spannungsverlauf innerhalb eines finiten Zeitintervalls durch den Mittelwert der Spannungswerte am Intervallbeginn und am Intervallende angenähert wird. Durch numerische Untersuchungen wird nachgewiesen, daß der Diskretisierungsfehler klein bleibt, wenn der Gesamtzeitraum zwischen zwei Belastungssprüngen bei der Berechnung in 5 bis 10 Teilintervalle zerlegt wird, die im logarithmischen Zeitmaßstab die gleiche Länge aufweisen. Diese Aussage gilt sowohl für den linearen als auch für den nichtlinearen Kriechbereich.

Das Modell zur Berechnung der Auswirkungen des zeitabhängigen Materialverhaltens auf Stahlbeton- und Spannbetonbauteile wird aus dem Prinzip der virtuellen Spannungen abgeleitet. Durch Überführung des Variationsprinzips in eine Extremalaufgabe kann die Berechnung der zeitlich veränderlichen Schnittgrößen und Deformationen auf die sukzessive Lösung quadratischer Optimierungsaufgaben zu festgelegten Betrachtungszeitpunkten zurückgeführt werden. Die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens sowie geometrisch nichtlinearer Einflüsse erfolgt iterativ innerhalb jedes Zeitschrittes. Mit der Einführung von Spannungsbegrenzungen als zusätzliche Nebenbedingungen können in jeder Iteration Materialplastizierungen, Rißbildungen des Betons bzw. „tension stiffening“-Effekte ohne prinzipielle Veränderung des mathematischen Modells berücksichtigt werden. Dazu ist eine vorausgehende Zerlegung der Querschnitte in Abhängigkeit der Beanspruchung in Schichten oder Fasern geringer Dicke notwendig. Die Vorspannung wird über die Vordehnung der Spannbewehrung erfaßt. Weiterhin können mit dem Berechnungsmodell Stahl-Beton-Verbundträger und nachträglich ergänzte Betonquerschnitte problemlos analysiert werden.

Es wird gezeigt, daß unter Berücksichtigung der Rißbildung zur Sicherung des Ebenbleibens der Querschnitte unumgänglich ist, die Kriechzahl außerhalb des Risses auf die elastischen Deformationen und im Riß auf die plastischen Deformationen zu beziehen. Wegen des Auftretens des nichtlinearen Kriechens ergibt sich bei exzentrisch beanspruchten Querschnitten eine nichtlineare Verteilung der elastischen Dehnung über die Querschnittshöhe, aus der eine nichtlineare Spannungsverteilung in der Betondruckzone

resultiert. Das Berechnungsmodell wird rechentechnisch in einem Computerprogramm umgesetzt. Anhand von Beispielrechnungen wird die Leistungsfähigkeit des Berechnungsmodells verdeutlicht.

Die Verifikation des Berechnungsmodells erfolgt anhand der von *Grasser* und *Kraemer* [8.1] ausgeglichenen Versuche von *Rüsch et al.* [8.2] an langzeitbelasteten, unbewehrten Betonprismen und mittels der Dauerlastversuche von *Ramu et al.* [8.3] an schlanken, exzentrisch belasteten Stahlbetonstützen. Dabei kann eine zufriedenstellende Übereinstimmung der berechneten Ergebnisse mit den Versuchswerten festgestellt werden. Mit Hilfe von Parameter-untersuchungen wird der Einfluß einzelner wesentlicher Kenngrößen auf die Berechnungs-ergebnisse aufgezeigt. Es wird deutlich, daß neben der wirklichkeitsnahen Beschreibung des Kriechens vor allem die Größe des Elastizitätsmoduls und der vorausgesetzte Grad der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen für das Erzielen realistischer Berechnungsergebnisse wesentlich sind. In diesem Zusammenhang erfolgt eine Abschätzung des Diskretisierungsfehlers infolge der näherungsweisen Beschreibung der Tragstruktur.

Im Kapitel 8 werden die Ergebnisse numerischer Untersuchungen, die mit Hilfe des vom Verfasser der Arbeit entwickelten Berechnungsmodells durchgeführt wurden, vorgestellt. Dabei steht besonders der Einfluß des nichtlinearen Kriechens auf die Spannungumlagerungen in einem teilweise vorgespannten Querschnitt und die nichtlineare Langzeitstabilität schlaff bewehrter Betonstützen im Mittelpunkt der Untersuchungen. Folgende Tendenzen konnten herausgearbeitet werden:

- Bei Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens läßt sich eine wesentliche Beschleunigung der Spannungumlagerungen zwischen Beton und Bewehrung nachweisen. Wegen des schnellen Abfalls der maximalen Betonspannungen liegt schon nach kurzer Belastungsdauer ein Spannungsniveau vor, bei dem das nichtlineare Kriechen vernachlässigt werden kann. Folglich nehmen die prozentualen Unterschiede der berechneten Umlagerungsgrößen mit zunehmender Belastungsdauer ab. Zum Zeitpunkt t_{∞} betragen die Unterschiede in den Betonspannungen weniger als 8%, in der vorgespannten und schlaffen Bewehrung wurden zum Zeitpunkt t_{∞} Abweichungen zwischen 1%-5% ermittelt. Aufgrund dieser geringfügigen Differenzen kann davon ausgegangen werden, daß eine Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens bei der Berechnung der querschnittsinternen Spannungumlagerungen in teilweise vorgespannten Querschnitten nicht zwingend notwendig ist.
- Durch die Berücksichtigung des nichtlinearen Kriechens bei der Berechnung der Langzeitstabilität schlaff bewehrter Stahlbetonstützen wird der Versagenszeitpunkt zum Teil nach einer erheblich kürzeren Belastungsdauer erreicht. Es wird gezeigt, daß die Tragfähigkeit langzeitbelasteter Stützen bis zu 10% überschätzt werden kann, wenn die Nichtlinearität des Kriechens unberücksichtigt bleibt. Allerdings ergeben sich diese deutlicheren Abweichungen nur für solche Fälle, bei denen das Kriechen des Betons an sich einen geringen Einfluß auf die Stabilität des betrachteten Bauteils hat. Wesentlich geringere Abweichungen ($\approx 2\%$) ergeben sich bei sehr schlanken, schwach bewehrten Stützen, bei denen die Langzeittragfähigkeit zum Teil nur noch 40..60% der zugeordneten Kurzzeittragfähigkeit beträgt. Die Berücksichtigung des zeitabhängigen Betonverhaltens durch eine spannungsunabhängige Kriechfunktion bei der Bemessung schlanker Stahlbetondruckglieder kann deshalb prinzipiell als ausreichend angesehen werden.

8.2 Ausblick

Die Anwendung der in der Arbeit vorgeschlagenen Berechnungsmethode erfolgte für ausgewählte Problemkreise. Im Hinblick auf die zukünftige Forschungstätigkeit kann das Berechnungsmodell als Grundlage für die Behandlung weiterer Themenkreise, bei denen zeitabhängige Einflüsse zu berücksichtigen sind, genutzt werden.

1. Das in der vorliegenden Arbeit hergeleitete Berechnungsmodell beruht auf einem deterministischen Materialgesetz. Der größte Teil der das Kriechen des Betons beeinflussenden Parameter ist jedoch in der Baupraxis von vornherein nicht bestimmt, sondern von ausgeprägt zufälligem Charakter. Die Anwendung des Berechnungsverfahrens innerhalb einer probabilistischen Langzeitanalyse sollte deswegen ein Schwerpunkt zukünftiger Forschung sein.
2. Das Berechnungsverfahren wurde unter der Voraussetzung des Ebenbleibens der Querschnitte und des starren Verbundes zwischen allen Querschnittsanteilen entwickelt. Im Zusammenhang mit der Problematik nachträglich ergänzter Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte ist der Einfluß der Verschieblichkeit des Verbundes zwischen Altbeton und Neubeton und des Verbundkriechens von Interesse, in dessen Folge zusätzliche zeitabhängige Deformationen in Betonverbundtragwerken auftreten.
3. Die Methodik der mathematischen Optimierung wurde im Rahmen der Arbeit auf stabförmige Bauteile angewendet. Prinzipiell kann das Berechnungsmodell auf komplexere Strukturen, wie ebene und räumliche Rahmentragwerke oder Flächentragwerke, erweitert werden. Bei der Anwendung der Verfahrensweise auf Flächentragwerke werden weiterführende Überlegungen zur Formulierung der Rißbedingungen und Plastizitätsbedingungen notwendig.

9 Liste der verwendeten Bezeichnungen

Formelzeichen, die aus Gründen der Übereinstimmung mit der Ursprungsliteratur aus Normen und Vorschriften bzw. aus der Fachliteratur unverändert in die Arbeit übernommen wurden, werden in dieser Übersicht nicht gesondert berücksichtigt. Ihre Bedeutung wird im laufenden Text erklärt.

1 Variable Größen - lateinische Buchstaben - *kursiv*

| | |
|---------------|--|
| A | - Fläche |
| C_c | - Kriechmaß des Betons |
| $C_{c,f}$ | - Kriechmaß des Betons, der Fließverformung zugeordnet |
| $C_{c,nl}$ | - nichtlinearer Anteil des Kriechmaßes des Betons |
| $C_{c,v}$ | - Kriechmaß des Betons, der verzögert elastischen Dehnung zugeordnet |
| E_c | - Betonelastizitätsmodul |
| E_{cm} | - Mittelwert des Betonelastizitätsmoduls |
| $E_{c,28}$ | - Elastizitätsmodul zu einem Betonalter von 28 Tagen |
| E_p | - Elastizitätsmodul Spannstahl |
| E_s | - Elastizitätsmodul Betonstahl |
| f_{ck} | - charakteristische Betondruckfestigkeit |
| f_{cm} | - mittlere Betondruckfestigkeit |
| $f_{cm,sus}$ | - Dauerstandsfestigkeit des Betons |
| $f_{ctk,min}$ | - Untergrenze der Betonzugfestigkeit |
| $f_{ctk,max}$ | - Obergrenze der Betonzugfestigkeit |
| f_{ctm} | - mittlere zentrische Zugfestigkeit des Betons |
| f_{pk} | - Streckgrenze Spannstahl |
| f_{sy} | - Streckgrenze Betonstahl |
| $I_{y(z)}$ | - Trägheitsmoment um y(z)-Achse |
| J_c | - Kriechfunktion des Betons |
| J_p | - Kriechfunktion des Spannstahls |
| L | - Longitudinalkraft |
| $M_{y(z)}$ | - Biegemoment um die y(z)-Achse |
| $M_{l,y(z)}$ | - Biegemoment im Querschnittsanteil l um die y(z)-Achse |
| N_x | - Normalkraft |
| $N_{l,x}$ | - Normalkraft im Querschnittsanteil l |
| $P_{x(y)(z)}$ | - Einzelkraft in Richtung der x(y)(z)-Achse |
| $p_{x(y)(z)}$ | - Gleichstreckenlast in Richtung der x(y)(z)-Achse |
| $Q_{y(z)}$ | - Querkraft in Richtung der y(z)-Achse |
| R_c | - Relaxationsfunktion des Betons |
| S | - Oberfläche |
| s | - Spannungsniveau |

| | |
|------------|---|
| s_k | - Knicklänge |
| $T_{y(z)}$ | - Transversalkraft in Richtung der y(z)-Achse |
| t | - Zeit |
| t_i | - beliebiger Betrachtungszeitpunkt |
| t_k | - aktueller Betrachtungszeitpunkt |
| t_{sh} | - Zeitpunkt des Schwindbeginns |
| t_T | - wirksames Betonalter unter Berücksichtigung des Temperatureinflusses |
| t_w | - Zeitpunkt des Wirksamwerdens des Neubetons |
| T | - Temperatur |
| u_x | - Verschiebung in Richtung der Stabachse |
| V | - Volumen |
| $w_{y(z)}$ | - Durchbiegung in Richtung der y(z)-Achse |
| y_l | - Abstand des Querschnittsanteils l in y-Richtung von der Bezugsachse der Belastung |
| z_l | - Abstand des Querschnittsanteils l in z-Richtung von der Bezugsachse der Belastung |

2 Variable Größen - griechische Buchstaben - *kursiv*

| | |
|-----------------------|--|
| α | - Beiwert zur Berücksichtigung der Belastungsdauer auf die Nichtlinearität des Kriechens |
| α_E | - Beiwert zur Beschreibung des Einflusses der Zuschlagstoffart auf den Betonelelastizitätsmodul |
| α_h | - Hilfwert |
| β_{cc} | - Beiwert zur Beschreibung des Einflusses der Nacherhärtung auf die Betondruckfestigkeit |
| $\beta_{c,sus}$ | - Beiwert zur Beschreibung des Einflusses der Belastungsdauer auf die Betondruckfestigkeit |
| β_E | - Beiwert zur Beschreibung des Einflusses der Zeit auf den Betonelelastizitätsmodul |
| β_f | - Beiwert zur Berücksichtigung der Betonfestigkeit auf die Nichtlinearität des Kriechens |
| β_{ft} | - Beiwert zur Berücksichtigung der Betonfestigkeit auf die Nichtlinearität des Kriechens |
| β_τ | - Beiwert zur Berücksichtigung des Betonalters bei Belastungsbeginn auf die Nichtlinearität des Kriechens |
| β_h | - Hilfwert |
| ε_c | - Gesamtdehnung des Betons |
| $\varepsilon_{c,cr}$ | - Kriechdehnung des Betons |
| $\varepsilon_{c,el}$ | - elastische Dehnung des Betons |
| $\varepsilon_{c,v}$ | - Vordehnung des Betons |
| $\varepsilon_{l,xel}$ | - Dehnung eines Querschnittsanteils, die sich aus der „elastischen“ Verformung des Gesamtquerschnitts ergibt |
| ε_p | - Spannstahldehnung |
| $\varepsilon_{p,V}$ | - Vordehnung des Spannstahls |
| ε_s | - Betonstahldehnung |

| | |
|---------------------------|--|
| ε_{sh} | - Schwinddehnung |
| $\varepsilon_{sh,0}$ | - Grundswindmaß |
| $\varepsilon_{sh,\infty}$ | - Endswindmaß |
| η | - Belastungsniveau |
| $\kappa_{y(z)}$ | - Verkrümmung um y(z)-Achse |
| $\kappa_{l,y(z)el}$ | - Verkrümmung eines Querschnittsanteils, die sich aus der „elastischen“ Verformung des Gesamtquerschnitts ergibt |
| ρ | - Relaxationskennwert |
| σ_c | - Betonspannung |
| σ_p | - Spannstahlspannung |
| $\sigma_{p,V}$ | - Vordehnspannung des Spannstahls |
| $\sigma_{p,\Delta}$ | - Spannstahlspannung infolge zusätzlicher Belastung |
| σ_s | - Betonstahlspannung |
| σ_x | - Normalspannung |
| τ | - Betonalter bei Belastungsbeginn |
| τ_R | - Retardationszeit |
| φ_c | - Kriechzahl des Betons |
| $\varphi_{c,28}$ | - Kriechzahl des Betons bezogen auf den 28 Tage E-Modul |
| $\varphi_{c,f}$ | - Kriechzahl des Betons, der Fließverformung zugeordnet |
| $\varphi_{c,v}$ | - Kriechzahl des Betons, der verzögert elastischen Dehnung zugeordnet |
| φ_p | - Kriechzahl des Spannstahls |
| $\varphi_{y(z)}$ | - Querschnittsverdrehung um y(z)-Achse |
| ψ_c | - Relaxationszahl des Betons |

3 Funktionen - lateinische Buchstaben

| | |
|---------------|---|
| $F[\sigma_c]$ | - Kriechzahlerhöhungsfaktor für den Beton |
| $f(t, \tau)$ | - Funktion zur Berücksichtigung der Zeit auf den Kriechzahlerhöhungsfaktor |
| $s(\sigma_c)$ | - Funktion zur Berücksichtigung der Betonspannung auf den Kriechzahlerhöhungsfaktor |

4 Funktionen - griechische Buchstaben

| | |
|----------------|---|
| $\Phi_{k,i}^c$ | - Hilfswerte zur Beschreibung des Betonkriechens |
| $\Phi_{k,i}^p$ | - Hilfswerte zur Beschreibung des Spannstahlkriechens |
| Ψ_k^c | - Hilfswerte zur Beschreibung der E-Modulentwicklung des Betons |

5 Vektoren und Matrizen - lateinische Buchstaben - fett

- \mathbf{a}_e - algebraischer Operator, den Gleichgewichtsbedingungen am Querschnitt zugeordnet
- \mathbf{A}_e - algebraischer Operator, den Gleichgewichtsbedingungen am Gesamttragwerk zugeordnet
- \mathbf{a}_k - algebraischer Operator, den Verträglichkeitsbedingungen am Querschnitt zugeordnet
- \mathbf{a}_p - algebraischer Operator, den Plastizitätsbedingungen am Querschnitt zugeordnet
- \mathbf{A}_p - algebraischer Operator, den Plastizitätsbedingungen am Gesamttragwerk zugeordnet
- $\mathbf{A}_{R,0(m)}$ - algebraischer Operator, den statischen Randbedingungen am Rand 0(m) zugeordnet
- \mathbf{B} - Matrix der Querdehnzahlen
- \mathbf{c}_k - Vektor der Kriech-, Schwind- und Vorverformung eines Querschnitts
- \mathbf{C}_k - Vektor der Kriech-, Schwind- und Vorverformung für das Gesamttragwerk
- \mathbf{D}_e - Differentialoperator, den Gleichgewichtsbedingungen zugeordnet
- \mathbf{D}_e^{nl} - geometrisch nichtlinearer Anteil des Differentialoperators, den Gleichgewichtsbedingungen zugeordnet
- \mathbf{D}_e^{II} - Differentialoperator für Theorie II.Ordnung, den Gleichgewichtsbedingungen zugeordnet
- \mathbf{D}_k - Differentialoperator, den Verträglichkeitsbedingungen zugeordnet
- \mathbf{E} - Elastizitätsmatrix
- \mathbf{f}_k - Flexibilitätsmatrix eines Querschnitts
- \mathbf{F}_k - Flexibilitätsmatrix des Gesamttragwerks
- \mathbf{p} - Vektor der Volumenkräfte
- \mathbf{p}_k - Vektor der äußeren Belastung
- \mathbf{P}_k - Belastungsvektor
- \mathbf{q}_k - Vektor der Querschnittsdeformationen
- \mathbf{R}_t - Differentialoperator am Rand, den statischen Randbedingungen zugeordnet
- \mathbf{R}_t^{nl} - geometrisch nichtlinearer Anteil des Differentialoperators am Rand, den statischen Randbedingungen zugeordnet
- \mathbf{R}_t^{II} - Differentialoperator am Rand für Theorie II.Ordnung, den statischen Randbedingungen zugeordnet
- $\tilde{\mathbf{r}}$ - Vektor vorgegebener Randverschiebungen
- \mathbf{s}_k - Vektor der Schnittgrößen an einem Querschnitt
- $\mathbf{s}_{0,k}^{(-)}$ - Vektor der negativen Grenzspannungen an einem Querschnitt
- $\mathbf{s}_{0,k}^{(+)}$ - Vektor der positiven Grenzspannungen an einem Querschnitt
- $\mathbf{S}_{0,k}^{(-)}$ - Vektor der negativen Grenzspannungen am Gesamttragwerk
- $\mathbf{S}_{0,k}^{(+)}$ - Vektor der positiven Grenzspannungen am Gesamttragwerk
- $\tilde{\mathbf{t}}$ - Vektor vorgegebener Oberflächenspannungen
- $\tilde{\mathbf{t}}_k^{0(m)}$ - Vektor der vorgegebenen Randkraftgrößen am Rand 0(m)
- $\hat{\mathbf{u}}$ - Vektor geometrisch zulässiger Verschiebungen
- \mathbf{u}_k - Vektor der Stabverschiebungen

$\mathbf{u}_{0(m),k}$ - Vektor der Stabrandverformungen am Rand 0(m)

6 Vektoren und Matrizen - griechische Buchstaben - fett

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - Vektor der inneren Deformationen

$\boldsymbol{\varepsilon}_k$ - Vektor der Deformationen der Querschnittsanteile innerhalb eines Querschnitts

$\boldsymbol{\varepsilon}_{sh}$ - Vektor der Schwinddehnungen

$\boldsymbol{\varepsilon}_v$ - Vektor der Vorverformungen

$\boldsymbol{\lambda}_k$ - Vektor der Lagrangemultiplikatoren an einem Querschnitt

$\boldsymbol{\lambda}_p$ - Vektor der Fließparameter

$\boldsymbol{\lambda}_u$ - Vektor der Lagrangemultiplikatoren, den Gleichgewichtsbedingungen zugeordnet

$\boldsymbol{\lambda}_{u_s}$ - Vektor der Lagrangemultiplikatoren, den statischen Randbedingungen zugeordnet

$\boldsymbol{\sigma}$ - Vektor beliebiger Spannungen

$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ - Vektor statisch zulässiger Spannungen

$\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ - Vektor der tatsächlichen Spannungen

$\boldsymbol{\sigma}_k$ - Vektor der Schnittgrößenanteile

10 Literaturverzeichnis

Literatur zu Abschnitt 1:

- [1.1] DIN V ENV 1992, Teil 1-1, Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau (Vornorm 10.91)
- [1.2] Woolson, I. H.: Some remarkable tests indicating „Flow“ of concrete under pressure. Engineering News, Vol.54, No.18, 1905
- [1.3] McMillan, F.R.: A study of column test data. Journal of the American Concrete Institute, Vol.17, No.18, 1921
- [1.4] Davis, R. E.: Flow of concrete under sustained compression stresses. Journal of the American Concrete Institute, Vol. 25, 1928
- [1.5] Davis, R. E.; Davis, H. E.: Flow of concrete under sustained compression stresses. Proc. ASTM, Vol.33, part 2, 1930
- [1.6] Davis, R. E.; Davis, H. E.: Flow of concrete under sustained loads. Journal of the American Concrete Institute, Vol.28, 1931
- [1.7] Davis, R. E.; Davis, H. E.: Flow of concrete under the action of sustained loads. Journal of the American Concrete Institute, Vol.28, 1931
- [1.8] Davis, R. E.; Davis, H. E.; Hamilton, J. S.: Plastic flow of concrete under sustained stress. Proc. ASTM, Vol.37, 1934
- [1.9] Davis, R. E.: Plastic flow of concrete. Annual Report for 1937/1938, The Engineering Foundation
- [1.10] Glanville, W. H.: The creep or flow of concrete under load. Studies in reinforced concrete, part III, Dep. Scientific and industrial research, Techn. Paper No.12, London 1930
- [1.11] Glanville, W. H.; Thomas, F. G.: Further investigations on the creep or flow of concrete under load. Studies in reinforced concrete, part III, Dep. Scientific and industrial research, Techn. Paper No.21, London 1939
- [1.12] Withney, Ch. S.: Plain and reinforced concrete arches. Progress report on the limitations of the theory of elasticity and the effect of plastic flow, temperature variations and the Freyssinet-method of adjustment. Journal of the American Concrete Institute, Vol.29, Nr.7, 1932
- [1.13] Dischinger, F.: Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechens des Betons bei Bogenbrücken. Der Bauingenieur, H. 33/34, 1937
- [1.14] Dischinger, F.: Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke

und insbesondere der Bogenbrücken. Der Bauingenieur, H.5/6, 1939

- [1.15] Boltzmann, L.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Wiener Bericht 10, 1874
- [1.16] Arutjunjan, N. Ch.: Einige Fragen der Kriechtheorie. Moskva, Leningrad, Gosdechizdat 1952, (in Russisch)
- [1.17] Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzipes auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton- und Spannbeton. In: Beton- und Stahlbetonbau 62, 1967, Seiten 230-238 und 261-269
- [1.18] Bazant, Z.P.: Prediction of Concrete Creep Effects Using Age Adjusted Effective Modulus Method. Journal of the American Concrete Institute, Proceedings 69, 1972, pp.212-217
- [1.19] Freudenthal, A.M.; Roll, F.: Creep and Creep Recovery of Concrete and High Compressive Stress. Journal of the American Concrete Institute, Vol.29, No.12, June 1958
- [1.20] Wagner, O.: Das Kriechen unbewehrten Betons. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 131, Verlag Ernst & Sohn, 1958
- [1.21] Streit, W.: Zeitabhängige Verformungen von Beton infolge hoher Druckbeanspruchungen. Dissertation, München, 1991
- [1.22] Bazant, Z.P.; Prasannan, S.: Solidification theory for concrete creep. I: Formulation. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, ASCE, August 1989, pp. 1691-1703
- [1.23] Bazant, Z.P.; Prasannan, S.: Solidification theory for concrete creep. II: Verification and Application. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, ASCE, August 1989, pp. 1704-1725
- [1.24] Rüschi, H.; Jungwirth, D.: Stahlbeton - Spannbeton. Band 2: Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke. Werner - Verlag, Düsseldorf 1976
- [1.25] Rüschi, H.; Jungwirth, D.; Hilsdorf, H.: Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke. Teil C: Wirklichkeitsnahe Berechnung der Auswirkung von Kriechen und Schwinden. Beton und Stahlbetonbau, Heft 4, 1973 und Heft 6, 1973
- [1.26] Neville, A.M.; Dilger, W.H.; Brooks, J.J.: Creep of plain and structural concrete. Construction Press, London, New York, 1983
- [1.27] Bazant, Z.P.(ed.): Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete. John Wiley & Sons Ltd., Evanston, 1986
- [1.28] Chiorino, M.A.; Napoli, P.; Mola, F.; Koprna, M. (eds.): CEB Design Manual on Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete. Comité Euro-International du Béton (CEB), 1984

- [1.29] Šmerda, Z.; Kristek, V.: Creep and Shrinkage of Concrete Elements and Structures. Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, 1988
- [1.30] König, G.; Gerhardt, H.-Ch.: Spannungs- und Schnittgrößenumlagerungen infolge Kriechen und Schwinden des Betons bei Stabtragwerken aus Stahlbeton und Spannbeton. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 1986
- [1.31] Hampe, E.; Köppler, H.: Kriechen und Schwinden bei Querschnitten mit gerissener Betonzugzone. Handbibliothek Bauwesen, Heft 6, Berlin, 1967
- [1.32] Hampe, E.; Köppler, H.: Kriechen und Schwinden im Zustand II. Bauplanung-Bautechnik, Heft 1, Berlin, 1967
- [1.33] Krüger, W.: Kriechberechnungen bei Stahlbetonelementen. Schriftenreihe der Bauforschung, Bauakademie der DDR, Reihe Stahlbeton, Heft 25, Berlin, 1976
- [1.34] Krüger, W.: Anwendung der Theorie des elastisch kriechenden Körpers im linearen und nichtlinearen Bereich bei der Bestimmung der zeitabhängigen Spannungen und Verformungen einachsig beanspruchter Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte. Dissertation B, Wismar, 1983
- [1.35] Frey, J.; Trost, H.: Zur Berechnung von teilweise vorgespannten Betontragwerken im Gebrauchszustand. In: Beton- und Stahlbetonbau, Teil 1: 11/1983, Seiten 302-308, Teil 2: 12/1983, Seiten 331-335
- [1.36] Rao, S.V.K.M.; Rao, A.S.P.; Dilger, W.H.: Time-Dependent Analysis of Cracked Partially Prestressed Concrete Members. Journal of Structural Engineering, Vol.119, December, 1993, pp. 3571-3589
- [1.37] Rao, A.S.P.; Jayaraman, R.; Vimalanandam, V.; Babu, S.S.: Predicting Creep and Shrinkage Effects in Cracked Concrete Elements. Journal of Structural Engineering, Vol.120, September, 1994, pp. 2784-2791
- [1.38] Al-Zaid, R.Z.; Naaman, A.E.; Nowak, A.S.: Partially Prestressed Composite Beams under Sustained and Cyclic Loads. Journal of Structural Engineering, Vol.114, February, 1988, pp. 269-291
- [1.39] Raue, E.: Berechnung der Normalspannungen in Verbundquerschnitten im Zustand I und II unter Berücksichtigung des Kriechen und Schwinden des Betons. In: Ackermann, G.; Raue, E.; Ebel, L.; Setzpfandt, G.: Spannungsumlagerungen in Verbundquerschnitten aus Fertigteilen und Ort beton statisch bestimmter Träger infolge Kriechen und Schwinden unter Berücksichtigung der Rißbildung. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Verlag W.Ernst & Sohn, H. 431, Berlin 1992
- [1.40] Kordina, K.; Warner, R.F.: Über den Einfluß des Kriechens auf die Ausbiegungen schlanker Stahlbetonstützen. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Heft 250, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1975
- [1.41] Maier, A.: Berechnung der Momente des dauerbelasteten, schlanken Stahlbetondruckglieds nach der Theorie II.Ordnung. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 10, 1986

- [1.42] Gutiérrez, S.E.: Die Auswirkung kriech- und schwindbedingter Spannungsumlagerungen auf die Tragfähigkeit schlanker Stahlbetonstützen. Bauingenieur, 1994, S.143-150
- [1.43] Bazant, Z.P.; Tsubaki, T.: Nonlinear Creep Buckling of Reinforced Concrete Columns. Journal of the Structural Division, Vol.106, No. ST11, November, 1980
- [1.44] Floegl, H.: Traglastermittlung dünner Stahlbetonschalen mittels der Methode der Finiten Elemente unter Berücksichtigung wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens sowie geometrischer Nichtlinearität. Dissertation, Wien, 1981
- [1.45] Hofstetter, G.: Physikalisch und geometrisch nichtlineare Traglastanalyse von Spannbetonscheiben, -platten und -schalen mittels der Methode der Finiten Elemente. Dissertation, Wien, 1987
- [1.46] Walter, H.: Finite Elemente Berechnungen von Flächentragwerken aus Stahl- und Spannbeton unter Berücksichtigung von Langzeitverformungen und Zustand II. Dissertation, Wien, 1988
- [1.47] Hofstetter, G.; Walter, H.; Mang, H.: Finite Elemente Berechnungen von Flächentragwerken aus Spannbeton unter Berücksichtigung von Langzeitverformungen und Zustand II. In: Bauingenieur, 1989, Seiten 449-461

Literatur zu Abschnitt 2:

- [2.1] Hilsdorf, H. K.: Beton. Aufsatz im Betonkalender 1995, Teil I, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1995
- [2.2] Wesche, K.: Baustoffe für tragende Bauteile. Band 2: Beton. Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin 1993
- [2.3] Hampe, E.; Raue, E.; Kaller, W.: Stahlbeton - Teil 1: Grundlagen, Verlag für Bauwesen, Berlin 1993
- [2.4] Streit, W.: Zeitabhängige Verformungen von Beton infolge hoher Druckbeanspruchungen. Dissertation, München, 1991
- [2.5] Rüschi, H.; Jungwirth, D.: Stahlbeton - Spannbeton. Band 2: Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke. Werner - Verlag, Düsseldorf 1976
- [2.6] Bazant, Z.P.; Kim, J.-K.: Improved prediction model for time-dependent deformations of concrete: Part 3 - Creep at drying. Materials and structures, 25, 1992, pp. 21-28
- [2.7] Wagner, O.: Das Kriechen unbewehrten Betons. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, H. 131, Verlag Ernst & Sohn, 1958

- [2.8] Stöckl, S.: Versuche auf den Einfluß der Belastungshöhe auf das Kriechen des Betons. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 324, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1981
- [2.9] Grasser, E.; Kraemer, U.: Kriechen von Beton unter hoher zentrischer und exzentrischer Druckbeanspruchung. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 358, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1985
- [2.10] CEB-FIP Model Code 90. First Draft 1988. Bulletin d' Information No.195. Lausanne 1990
- [2.11] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau. Teil 1: Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984
- [2.12] DIN 1045, Ausgabe 1988: Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung
- [2.13] DIN V ENV 1992, Teil 1-1, Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau (Vornorm 10.91)
- [2.14] Deutscher Ausschuß für Stahlbeton: Bemessungshilfen zu Eurocode 2 Teil 1- Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken. DAfStb H.425, Beuth Verlag, Berlin, 1992
- [2.15] DIN 4227, Teil 1, Ausgabe 1988: Spannbeton, Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter oder voller Vorspannung
- [2.16] Bazant, Z.P.; Kim, J.-K., Panula, L.: Improved prediction model for time-dependent deformations of concrete: Part 1 - Shrinkage. Materials and Structures, 24, 1991, pp. 327-345
- [2.17] Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton- und Spannbeton. In: Beton- und Stahlbetonbau 62, 1967, Seiten 230-238 und 261-269
- [2.18] Bazant, Z.P.; Kim, S.S.: Approximate relaxation function for concrete. Journal of the Structural Division, ASCE, 105, 1979, pp. 2695-2705
- [2.19] Neville, A.M.; Dilger, W.H.; Brooks, J.J.: Creep of plain and structural concrete. Construction Press, London, New York, 1983
- [2.20] Zerna, W.: Näherungsweise Berechnung des Alterungsbeiwertes für das Betonkriechen. In: Beton- und Stahlbetonbau 81, 1986, Seiten 275-278
- [2.21] Blessenohl, B.: Zur numerischen Berechnung der Auswirkungen des Kriechens und Schwindens auf Betonverbundtragwerke -Grundlagen und Algorithmen für die EDV. Dissertation, Aachen, 1990
- [2.22] Schade, D.: Einige eindimensionale Ansätze zur Berechnung des Kriechens und der Relaxation von Betontragwerken. In: Beton- und Stahlbetonbau 67, 1972, Seiten 63-

- [2.23] Trost, H.: Spannungs-Dehnungs-Gesetz eines viskoelastischen Festkörpers wie Beton und Folgerungen für Stabtragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton. In: Beton 16, 1966, Seiten 233-248
- [2.24] Nielsen, L.F.: Kriechen und Relaxation des Betons. In: Beton- und Stahlbetonbau 65, 1970, Seiten 272-275
- [2.25] Bazant, Z.P.; Prasannan, S.: Solidification theory for concrete creep. I: Formulation. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, ASCE, August 1989, pp. 1691-1703
- [2.26] Bazant, Z.P.; Prasannan, S.: Solidification theory for concrete creep. II: Verification and Application. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, ASCE, August 1989, pp. 1704-1725
- [2.27] Bazant, Z.P.: Creep and Thermal Effects in Concrete Structures: A Conspectus of some new Developments. EURO-C 1994, Computational Modelling of Concrete Structures, Proceedings, Volume 1, pp. 461-480
- [2.28] Bazant, Z.P.(ed.): Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete. John Wiley & Sons Ltd., Evanston, 1986
- [2.29] Freudenthal, A.M.; Roll, F.: Creep and Creep Recovery of Concrete and High Compressive Stress. Journal of the American Concrete Institute, Vol.29, No.12, June 1958
- [2.30] Bazant, Z.P.; Asghari, A.A.: Constitutive Law for nonlinear Creep of Concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.103, February 1977, 113-124
- [2.31] Shen, J.-H.: Lineare und nichtlineare Theorie des Kriechens und der Relaxation von Beton unter Druckbeanspruchung. DAFStb. H.432, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, 1992
- [2.32] Maier, A.: Ein verbessertes Verfahren zur Berücksichtigung des Kriecheinflusses auf die Traglast knickgefährdeter Stahlbetondruckglieder. Dissertation, München 1978
- [2.33] Aleksandrovskij, S.V.; Popkova, O.M.: Nichtlineare Kriechdeformationen von Beton unter komplexen Lastgeschichten. Beton i Zhelezobeton, No.1, 1970, Seiten 27-32 (in Russisch)
- [2.34] Bazant, Z.P.; Kim, J.-K.: Improved prediction model for time-dependent deformations of concrete: Part 2 - Basic creep. Materials and Structures, 24, 1991, pp. 409-421
- [2.35] Bazant, Z.P.; Kim, S.S.: Nonlinear Creep of Concrete - Adaptation and Flow. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.105, June 1979, pp. 429-445
- [2.36] Rüschi, H.; Sell, R.; Rasch, Ch.; Grassler, E.; Hummel, A.; Wesche, K.; Flatten, H.:

- Festigkeit und Verformung von unbewehrtem Beton unter konstanter Dauerlast. DAfStb. H.198, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1968
- [2.37] Hofstetter, G.; Walter, H.; Mang, H.: Finite Elemente Berechnungen von Flächentragwerken aus Spannbeton unter Berücksichtigung von Langzeitverformungen und Zustand II. In: Bauingenieur, 1989, Seiten 449-461
 - [2.38] Krüger, W.: Anwendung der Theorie des elastisch kriechenden Körpers im linearen und nichtlinearen Bereich bei der Bestimmung der zeitabhängigen Spannungen und Verformungen einachsiger beanspruchter Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte. Dissertation B, Wismar, 1983
 - [2.39] Chiorino, M.A.; Napoli, P.; Mola, F.; Koprna, M. (eds.): CEB Design Manual on Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete. Comité Euro-International du Béton (CEB), 1984
 - [2.40] Müller, H. S.: Zur Vorhersage des Kriechens von Konstruktionsbeton. Dissertation, Karlsruhe, 1986
 - [2.41] Pfefferle, R.: Zur Theorie des Betonkriechens. Dissertation, Karlsruhe, 1971
 - [2.42] CEB-FIP, International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures - Principles and Recommendations, Comité Euro-International du Béton, Prague, 1970
 - [2.43] CEB-FIP Model Code for Concrete Structures , 3rd Edition, Comité Euro-International du Béton, Paris, 1978
 - [2.44] ACI Committee 209: Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures. (ACI 209R-82), American Concrete Institute, Detroit, 1982
 - [2.45] Bazant, Z.P.; Osman, E.: Double Power Law for Basic Creep of Concrete. Materials and Structures, 9, Januar-Februar 1976, pp. 3-11
 - [2.46] Bazant, Z.P.; Chern, J.-C.: Log Double Power Law for Concrete Creep. ACI-Journal, September-October, 1985
 - [2.47] Bazant, Z.P.; Panula, L.: Prediction of Time-Dependent Deformations of Concrete. Materials and Structures, Paris, Parts I and II, Vol. 11, No.65, 1978, pp. 307-328; Parts III and IV, Vol. 11, No. 66, 1978, pp. 415-434; Parts V and VI, Vol. 12, No. 69, 1979
 - [2.48] TGL 33403 - Betonbau; Festigkeits- und Formänderungskennwerte, Oktober 1980
 - [2.49] Frey, J.: Näherungsweise Beschreibung des zeitabhängigen Betonverhaltens nach DIN 4227 Teil 1. In: Beton- und Stahlbetonbau, 3/1986, Seiten 65-67
 - [2.50] Bazant, Z.P.; Kim, J.-K.: Improved prediction model for time-dependent deformations of concrete: Part 4 - Temperature effects. Materials and Structures, 25, 1992, pp. 84-94

- [2.51] Nechvatal, D.; Stöckl, S.; Kupfer, H.: Influence of moisture on the long-time strength of concrete and influence of stress level, moisture and type of cement on creep. Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete, Barcelona, 1993
- [2.52] Rasch, Ch.: Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehnungsgeschwindigkeit. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H.154, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1962
- [2.53] Geistefeld, H.; Goris, A.: Tragwerke aus bewehrtem Beton nach Eurocode 2 (DIN V ENV 1992) im Vergleich zu DIN 1045 und DIN 4227. Beuth Verlag Berlin-Wien-Zürich, Werner-Verlag Düsseldorf, 1993
- [2.54] Krassin, D.: Berechnungsverfahren für das Langzeitverhalten von Stahlbetonkonstruktionen. Dissertation, Bochum, 1985
- [2.55] Schneeberger, H.: Spannungs-Dehnungsverhalten von zentrisch gedrückten Betonprismen. In: Bauingenieur, 9/1996, Seiten 395-399
- [2.56] Grasser, E.: Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten bei einachsigen Spannungszuständen. Dissertation, München, 1968

Literatur zu Abschnitt 3:

- [3.1] Svensvik, B.: Zum Verformungsverhalten gerissener Stahlbetonbalken unter Einschluß der Mitwirkung des Betons auf Zug in Abhängigkeit von Last und Zeit. Dissertation, Braunschweig 1981
- [3.2] Schaper, G.: Stahlbetonplatten unter Last- und Zwangsbeanspruchung - Berechnung des zeitabhängigen Verhaltens bei Berücksichtigung der Rißbildung. Bericht Nr. 78-29, Institut für Statik, TU Braunschweig, 1978
- [3.3] Dilger, W.: Veränderlichkeit der Biege- und Schubfestigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluß auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H.179, Berlin, 1966
- [3.4] Findeisen, Ch.: Zur Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens von stabförmigen Stahlbetonkonstruktionen mit physikalisch nichtlinearen Werkstoffgesetzen für Biegung mit zweiachsiger Außermittigkeit und Längskraft. Dissertation, Leipzig, 1992
- [3.5] Frey, J.; Thormälen, U.: Zur Ermittlung von Spannungsumlagerungen unter Berücksichtigung der Spannstahlrelaxation. In: Beton- und Stahlbetonbau, 5/1980, Seiten 118-120
- [3.6] CEB-FIP Model Code 90. First Draft 1988. Bulletin d' Information No.195. Lausanne 1990

- [3.7] DIN V ENV 1992, Teil 1-1, Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau (Vornorm 10.91)
- [3.8] Magura, D.; Sozen, M.A.; Siess, C.P.: A study of stress relaxation in prestressing reinforcement. PCI Journal, 9 (2), 1964, pp. 13-57
- [3.9] Blessenohl, B.: Zur numerischen Berechnung der Auswirkungen des Kriechens und Schwindens auf Betonverbundtragwerke -Grundlagen und Algorithmen für die EDV. Dissertation, Aachen, 1990

Literatur zu Abschnitt 4:

- [4.1] Walter, H.: Finite Elemente Berechnungen von Flächentragwerken aus Stahl- und Spannbeton unter Berücksichtigung von Langzeitverformungen und Zustand II. Dissertation, Wien 1988
- [4.2] Ackermann, G.; Raue, E.; Ebel, L.; Setzpfandt, G.: Spannungsumlagerungen in Verbundquerschnitten aus Fertigteilen und Ortbeton statisch bestimmter Träger infolge Kriechen und Schwinden unter Berücksichtigung der Rißbildung. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Verlag W.Ernst & Sohn, H. 431, Berlin 1992
- [4.3] Krüger, W.: Kriechberechnungen bei Stahlbetonelementen. Schriftenreihe der Bauforschung, Bauakademie der DDR, Reihe Stahlbeton, Heft 25, Berlin, 1976
- [4.4] Krüger, W.: Anwendung der Theorie des elastisch kriechenden Körpers im linearen und nichtlinearen Bereich bei der Bestimmung der zeitabhängigen Spannungen und Verformungen einachsig beanspruchter Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitte. Dissertation B, Wismar, 1983
- [4.5] Dall'Asta, A.: Nonlinear Behavior of Composite Columns under Varying Load Histories. Journal of Engineering Mechanics, Vol.122, August 1996, pp.743-752
- [4.6] Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton- und Spannbeton. In: Beton- und Stahlbetonbau 62, 1967, Seiten 230-238 und 261-269
- [4.7] Bazant, Z.P.: Prediction of Concrete Creep Effects Using Age Adjusted Effective Modulus Method. Journal of the American Concrete Institute, Proceedings 69, 1972, pp.212-217
- [4.8] Frey, J.: Zur Berechnung von vorgespannten Beton-Verbundtragwerken im Gebrauchszustand. In: Beton- und Stahlbetonbau, Teil 1: 11/1980, Seiten 257-262, Teil 2: 12/1980, Seiten 297-300
- [4.9] Frey, J.; Trost, H.: Zur Berechnung von teilweise vorgespannten Betontragwerken im Gebrauchszustand. In: Beton- und Stahlbetonbau, Teil 1: 11/1983, Seiten 302-308, Teil 2: 12/1983, Seiten 331-335
- [4.10] Rao, S.V.K.M.; Rao, A.S.P.; Dilger, W.H.: Time-Dependent Analysis of Cracked Partially Prestressed Concrete Members. Journal of Structural Engineering, Vol.119, December, 1993, pp. 3571-3589

- [4.11] Dezi, L.; Tarantino, A.M.: Creep in Composite Continuous Beams. I: Theoretical Treatment. Journal of Structural Engineering, Vol. 119, July 1993, pp. 2095-2111
- [4.12] Bazant, Z.P.; Wu, S.T.: Dirichlet Series Creep Function For Aging Concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 99, April 1973, pp. 367-387
- [4.13] Blessenohl, B.: Zur numerischen Berechnung der Auswirkungen des Kriechens und Schwindens auf Betonverbundtragwerke -Grundlagen und Algorithmen für die EDV. Dissertation, Aachen, 1990
- [4.14] Bazant, Z.P.; Najjar, L.J.: Comparison of Approximate Linear Methods for Concrete Creep. Journal of the Structural Division, Vol. 99, September 1973, pp.1851-1873
- [4.15] Chiorino, M.A.; Napoli, P.; Mola, F.; Koprna, M. (eds.): CEB Design Manual on Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete. Comité Euro-International du Béton (CEB), 1984
- [4.16] Stein, E.; Mahnken, R.: Zur stabilen und adaptiven Zeitintegration mechanischer Kriechprozesse. In: Festschrift Heinz Duddeck, Braunschweig 1988
- [4.17] Kawano, A.; Warner, R.F.: Model Formulation for Numerical Creep Calculations for Concrete. Journal of Structural Engineering, Vol.122, March 1996, pp.284-290
- [4.18] Rüsç, H.; Jungwirth, D.: Stahlbeton - Spannbeton. Band 2: Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke. Werner - Verlag, Düsseldorf 1976
- [4.19] Bazant, Z.P.: Theory of creep and shrinkage in concrete structures: a precis of recent developments. Mechanics today, S. Nemat-Nasser, ed., Vol.2, Pergamon Press, U.K., 1975, pp.1-93

Literatur zu Abschnitt 5:

- [5.1] Raue, E.: Lineare und nichtlineare Tragwerksanalyse mit Methoden der mathematischen Optimierung. Berichte zum XII. IKM, Weimar, 1990
- [5.2] Müller, H.; Burkhardt, G.: Baumechanik (Stabtragwerke). Studienliteratur Bauwesen, 8.Lehrbrief, VMS Verlag Modernes Studieren Hamburg-Dresden GmbH
- [5.3] Skrzypek, J.J.; Hetnarski, R.B.: Plasticity and Creep. CRC Press, Boca Raton - Ann Arbor - London - Tokyo, 1993
- [5.4] Szilard, R.: Finite Berechnungsmethoden der Strukturmechanik. Band 1 Stabwerke, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin - München, 1982
- [5.5] DIN V ENV 1992, Teil 1-1, Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau (Vornorm

10.91)

- [5.6] CEB-FIP Model Code 90. First Draft 1988. Bulletin d' Information No.195. Lausanne 1990
- [5.7] Rao, S.: Umlagerungen der Schnittkräfte in Stahlbetonkonstruktionen. Grundlagen der Berechnung bei statisch unbestimmten Tragwerken unter Berücksichtigung der plastischen Verformungen. DAFStb, H.177, W. Ernst & Sohn, 1966
- [5.8] Kreller, H.: Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung. Dissertation, Universität Stuttgart, 1989
- [5.9] Findeisen, Ch.: Zur Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens von stabförmigen Stahlbetonkonstruktionen mit physikalisch nichtlinearen Werkstoffgesetzen für Biegung mit zweiachsiger Außermittigkeit und Längskraft. Dissertation, Leipzig, 1992
- [5.10] Quast, U.: Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone. Beton- und Stahlbetonbau, 10/1981, S.247-250
- [5.11] Schwennicke, A.: Zur Berechnung von Stahlbetonbalken und -scheiben im gerissenen Zustand unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen. Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau, Techn. Universität Berlin, 1983
- [5.12] Lin, Ch.-S.: Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs and shells. Berkeley, California, 1973
- [5.13] Kabir, A.F.: Nonlinear analysis of reinforced concrete panels, slabs and shells for time-dependent effects. Report No. UC SESM 76-6, University of California, Berkeley, 1976
- [5.14] Krassin, D.: Berechnungsverfahren für das Langzeitverhalten von Stahlbetonkonstruktionen. Dissertation, Bochum, 1985
- [5.15] Vismann, U.; Zilch, K.: Eingeprägte Verformungen im Betonbau, Entwicklung eines Bemessungs- und Sicherheitskonzeptes. IRB Verlag, Aachen, 1993
- [5.16] Petersen, Chr.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. Verlag Vieweg, Wiesbaden, 1982
- [5.17] Schüler, H.: Zur Analyse und zur Bemessung adaptiver Tragwerke aus Stahlbeton unter dynamischen Einwirkungen. Dissertation, Weimar, 1996
- [5.18] Diener, J.: CERES - Creep Effects in Reinforced Concrete Beam Structures. Programmdokumentation, Bauhaus - Universität Weimar, 1997
- [5.19] NAG Fortran Library Manual. Mark 15, Volume 4

Literatur zu Abschnitt 6:

- [6.1] Grasser, E.; Kraemer, U.: Kriechen von Beton unter hoher zentrischer und exzentrischer Druckbeanspruchung. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 358, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1985
- [6.2] Rüsch, H.; Sell, R.; Rasch, Ch.; Grasser, E.; Hummel, A.; Wesche, K.; Flatten, H.: Festigkeit und Verformung von unbewehrtem Beton unter konstanter Dauerlast. DAfStb. H.198, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1968
- [6.3] DIN 1045, Ausgabe 1988: Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung
- [6.4] Rüsch, H.: Stahlbeton - Spannbeton, Band 1, Werkstoffeigenschaften und Bemessungsverfahren. Werner-Verlag, Düsseldorf, 1972
- [6.5] Streit, W.: Zeitabhängige Verformungen von Beton infolge hoher Druckbeanspruchungen. Dissertation, München, 1991
- [6.6] Bridge, R.Q.: Composite columns under sustained Load. Journal of the Structural Division, Vol.105, March 1979, pp.563-578
- [6.7] Drysdale, R.G.; Huggins, M.W.: Sustained biaxial load on slender concrete columns. Journal of the Structural Division, Vol.97, May 1971, pp. 1423-1443
- [6.8] Behan, J.E.; O'Connor, C.: Creep buckling of reinforced concrete columns. Journal of the Structural Division, Vol.108, December 1982, pp.2799-2808
- [6.9] Kordina, K.: Langzeitversuche an Stahlbetonstützen. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 250, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 1975
- [6.10] Ramu, P.; Grenacher, M.; Baumann, M.; Thürlimann, B.: Versuche an gelenkig gelagerten Stahlbetonstützen unter Dauerlast. Institut für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Mai 1969
- [6.11] Vismann, U.; Zilch, K.: Eingeprägte Verformungen im Betonbau, Entwicklung eines Bemessungs- und Sicherheitskonzeptes. IRB Verlag, Aachen, 1993

Literatur zu Abschnitt 7:

- [7.1] DIN V ENV 1992, Teil 1-1, Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau (Vornorm 10.91)
- [7.2] DIN V ENV 1992, Teil 1-3, Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 3: Vorgefertigte Bauteile und Tragwerke
- [7.3] Frey, J.; Trost, H.: Zur Berechnung von teilweise vorgespannten Betontragwerken im Gebrauchszustand. In: Beton- und Stahlbetonbau, Teil 1: 11/1983, Seiten 302-308, Teil 2: 12/1983, Seiten 331-335

Literatur zu Abschnitt 8:

- [8.1] Grasser, E.; Kraemer, U.: Kriechen von Beton unter hoher zentrischer und exzentrischer Druckbeanspruchung. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, H. 358, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1985
- [8.2] Rüschi, H.; Sell, R.; Rasch, Ch.; Grasser, E.; Hummel, A.; Wesche, K.; Flatten, H.: Festigkeit und Verformung von unbewehrtem Beton unter konstanter Dauerlast. DAfStb. H.198, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1968
- [8.3] Ramu, P.; Grenacher, M.; Baumann, M.; Thürlimann, B.: Versuche an gelenkig gelagerten Stahlbetonstützen unter Dauerlast. Institut für Baustatik, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Mai 1969